学籍番号： **氏名：**

演習問題 9（2014 年 12 月 18 日）

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．

演習 9.1. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) := \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ で定める．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ．

演習 9.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g_n(x) := \dfrac{n}{1+nx}$ で定め，また $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(x) := \frac{1}{x}$ $(= \lim_{n\to\infty} g_n(x))$ で定める．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $(0,\infty)$ 上で一様収束**しない**ことを示せ．

演習 9.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $h_n(x) := x^n$ で定める．
(1) $a \in (0,1)$ とする．このとき $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,a]$ 上で 0 に一様収束することを示せ．
(2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に $[0,1)$ 上で一様収束**しない**ことを示せ．