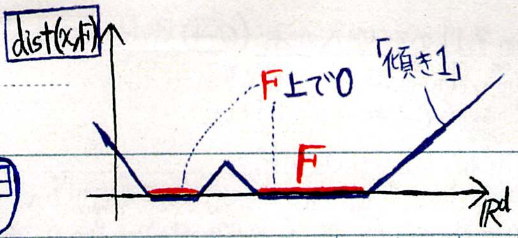
No. 21

Date

12月17日
ここから



まず，§7の残りで分布の収束に関する基本的な事実を幾つか証明する．

Lemma 7.5 F を $\mathbb{R}^d$ の閉集合，$F \neq \emptyset$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ を次で定める：

$$f_n(x) := \min\{1, n \cdot \mathrm{dist}(x,F)\}, \quad \mathrm{dist}(x,F) := \inf_{y \in F} |x-y|.$$

このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ であり，また $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus F}(x)$.

∵ まず，次を示そう．

claim 1 $\forall x \in F,\ \mathrm{dist}(x,F) = 0$ であり，$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus F,\ \mathrm{dist}(x,F) > 0$.

∵ $\emptyset \neq \{|x-y| \mid y \in F\} \subset [0,\infty)$ より $\mathrm{dist}(x,F) \in [0,\infty),\ \forall x \in \mathbb{R}^d$.
$x \in F$ ならば $\mathrm{dist}(x,F) \leqq |x-x| = 0$ より $\mathrm{dist}(x,F) = 0$.
$x \in \mathbb{R}^d \setminus F$ ならば，$\mathbb{R}^d \setminus F$ が $\mathbb{R}^d$ の開集合であることから
$\exists \varepsilon \in (0,\infty),\ B_d(x,\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y-x| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^d \setminus F$
であり，従って $\forall y \in F,\ y \notin B_d(x,\varepsilon)$ すなわち $|y-x| \geqq \varepsilon$.
ゆえに $\mathrm{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} |x-y| \geqq \varepsilon > 0$. // (claim 1)

claim 2 $\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F)| \leqq |x-y|$.

∵ $x, y \in \mathbb{R}^d$，$z \in F$ とすると3角不等式により
$|y-z| \geqq |x-z| - |x-y| \geqq \mathrm{dist}(x,F) - |x-y|$
であるので $z \in F$ について下限をとれば
$\mathrm{dist}(y,F) \geqq \mathrm{dist}(x,F) - |x-y|$，すなわち
$\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F) \leqq |x-y|$. x と y を入れ替えれば
$\mathrm{dist}(y,F) - \mathrm{dist}(x,F) \leqq |y-x| = |x-y|$.
両者を合わせて $|\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F)| \leqq |x-y|$. // (claim 2)

すると，$g(t) := \min\{1, t\}$ で与えられる $g : [0,\infty) \to [0,1]$ が連続単調非減少であることと $f_n(x) = g(n\,\mathrm{dist}(x,F))$ に注意すれば，claim 2 より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ であり，また $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq 1$. さらに claim 1 より，$x \in F$ ならば $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus F}(x)$，$x \in \mathbb{R}^d \setminus F$ ならば $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus F}(x)$. ■

Prop 7.6 $C_c(\mathbb{R}^d) := \{f \mid f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ f \text{は連続},\ \exists N \in \mathbb{N},\ f|_{\mathbb{R}^d \setminus [-N,N]^d} = 0\}$ とおく．$\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とし，$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d)$，$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\nu$ と仮定する．このとき $\mu = \nu$.

注 $\boxed{C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d)}$ である．実際，$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ とし $N \in \mathbb{N}$ を $f|_{\mathbb{R}^d \setminus [-N,N]^d} = 0$ となるように取ると，$[-N,N]^d$ のコンパクト性により
$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| = \sup_{x\in[-N,N]^d} |f(x)| = \max_{x\in[-N,N]^d} |f(x)| < \infty$. $\therefore f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Prop 7.6の証明

U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．$N \in \mathbb{N}$ とし $F := \mathbb{R}^d \setminus (U \cap (-N,N)^d)$ とおくと，F は $\mathbb{R}^d$ の閉集合，$F \neq \emptyset$ であり，そこで Lemma 7.5 のような $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ が取れる．ところが $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{R}^d$ 上で $0 \leqq f_n \leqq f_{n+1} \leqq \mathbb{1}_{U\cap(-N,N)^d}$ なので $f_n|_{\mathbb{R}^d \setminus [-N,N]^d} = 0$，従って $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ であり，そこで μ, ν に対する仮定から

$$\mu(U \cap (-N,N)^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{U\cap(-N,N)^d}\,d\mu \underset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,d\mu$$
$$\nu(U \cap (-N,N)^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{U\cap(-N,N)^d}\,d\nu \underset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,d\nu$$

仮定より

さらに Prop 1.6-(3) を用いて $N \to \infty$ とすれば，
$\mu(U) = \lim_{N\to\infty} \mu(U \cap (-N,N)^d) = \lim_{n\to\infty} \nu(U \cap (-N,N)^d) = \nu(U)$.
よって，$\{U \mid U \text{は} \mathbb{R}^d \text{の開集合}\}$ が乗法族であることと $\sigma_{\mathbb{R}^d}(\{U \mid U \text{は} \mathbb{R}^d \text{の開集合}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に注意すると，確率測度の一意性定理（Thm 4.6）が適用でき，$\mu = \nu$ を得る． ■

系 7.7 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，
$\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ かつ $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu$ ならば $\mu = \nu$.

∵ $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ かつ $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu$ であるので，$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対し
$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\nu.$$
よって Prop 7.6 により $\mu = \nu$. ■

Prop 7.8 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とし，次を仮定する：
$\forall \{n(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加，$\exists \{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加，$\mu_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$. このとき $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

∵ $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ とし，$\{\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$ に収束しないと仮定する．このとき Thm 5.3-(3) の証明と同様にして，
$\exists \varepsilon \in (0,\infty)$，$\exists \{n(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加，

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_{n(k)} - \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu \right| \geqq \varepsilon. \quad \cdots\cdots (7.2)$$

ところが仮定により $\exists \{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加，$\mu_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ であり，すると $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ より $\lim_{\ell\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_{n(k(\ell))} = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$.
これは (7.2) に反し矛盾であるので，$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$ が従い，$f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ は任意であるので $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ である． ■

下記の $\left\{\begin{array}{l}\text{Thm 7.11} \\ \text{Thm 7.12}\end{array}\right.$ のために次の Def 7.9, Thm 7.10 が必要：

Thm 7.11の証明への注 (ノート Problems 0.1, 0.2)

$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [-\infty, \infty]$ とする.

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqq b_n$ ならば

$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} b_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ならば $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Def 7.9 (分布関数) $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対し $F_\mu : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ を

$$F_\mu(x_1, \cdots, x_d) := \mu((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d])$$

で定め, これを μ の分布関数 (distribution function) という.

Thm 7.10 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni \mu \longmapsto F_\mu$ は, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ から次の集合への全単射

$\{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F$ は右連続, 単調非減少, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\}$.

(注 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が右連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$.

ただしここで $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$\lim_{y \downarrow x} F(y) = a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists \delta \in (0,\infty),$

$\forall y \in (x, x+\delta), |F(y) - a| < \varepsilon$.)

(☺ ノート Prop 2.13, Thm 2.14, Cor 2.17.

また Thm 7.10 の $\mathbb{R}^d$ 版も成立つ: ノート Prop 2.19, Thm 2.20)

12月24日ここから

Thm 7.11 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対し次の(1)〜(6)は全て互いに同値である:

(1) $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

(2) $\mathbb{R}^d$ の任意の開集合 U に対し $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqq \mu(U)$.

(3) $\mathbb{R}^d$ の任意の閉集合 F に対し $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqq \mu(F)$.

(4) $\mu(\partial A) = 0$ であるような任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

(5) F_μ が x において連続であるような任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mu_n}(x) = F_\mu(x).$$

(6) $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu$.

((4)への注 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\partial A := \overline{A} \setminus \mathrm{int}\, A$ を $\mathbb{R}^d$ における A の境界という. ここで $\overline{A}$ は A の $\mathbb{R}^d$ における閉包, $\mathrm{int}\, A$ は A の $\mathbb{R}^d$ における内部 (A を含む $\mathbb{R}^d$ の閉集合のうち最小のもの, A に含まれる $\mathbb{R}^d$ の開集合のうち最大のもの) をそれぞれ表す.)

Thm 7.11の証明 (ページ右上の注も参照のこと.)

(1)⟹(2) U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする. $U = \mathbb{R}^d$ なら(2)の主張は自明なので, $U \neq \mathbb{R}^d$ と仮定してよい. このとき $F := \mathbb{R}^d \setminus U \neq \emptyset$ で F は $\mathbb{R}^d$ の閉集合なので, Lemma 7.5 のような $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ を取ることができる. すると $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上 $0 \leqq f_k \leqq f_{k+1} \leqq \mathbb{1}_U$ であるので, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(U) \geqq \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, d\mu_n$ であり, よって $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ を用いて

$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, d\mu$.

$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, d\mu \underset{\text{MCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_U\, d\mu = \mu(U)$ であるので, 前行の不等式で $k \to \infty$ とすれば $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqq \mu(U)$ を得る.

(2)⟹(3) F を $\mathbb{R}^d$ の閉集合とすると, $U := \mathbb{R}^d \setminus F$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合なので

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) = \limsup_{n\to\infty}(1 - \mu_n(U)) = 1 + \limsup_{n\to\infty}(-\mu_n(U))$$
$$= 1 - \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \underset{(2)}{\leqq} 1 - \mu(U) = \mu(F).$$

(3)⟹(2) U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とすると, $F := \mathbb{R}^d \setminus U$ は $\mathbb{R}^d$ の閉集合なので

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) = \liminf_{n\to\infty}(1 - \mu_n(F)) = -\limsup_{n\to\infty}(\mu_n(F) - 1)$$
$$= -\left(\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) - 1\right) = 1 - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F)$$
$$\underset{(3)}{\geqq} 1 - \mu(F) = \mu(U).$$

(3)⟹(4) (3)⟹(2) を既に上で示したので, (2), (3) の両方が成立すると仮定してよい. そこで $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ が $\mu(\partial A) = 0$ を満たすとき,

$$\mu(A) \leqq \mu(\overline{A}) = \mu(\mathrm{int}\, A) + \mu(\partial A) = \mu(\mathrm{int}\, A) + 0 = \mu(\mathrm{int}\, A)$$
$$\underset{(2)}{\leqq} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{int}\, A) \leqq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \leqq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A)$$
$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \underset{(3)}{\leqq} \mu(\overline{A}) = \mu(\mathrm{int}\, A) \leqq \mu(A)$$

12月17日ここまで

であるので $\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$.

(4)⟹(5) $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ とし, F_μ は x において連続と仮定する. $I := (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]$ とおくと容易に分かるように $\mathrm{int}\, I = (-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_d)$ であり, そこで Prop 1.6-(3) により

$$\mu(\mathrm{int}\, I) = \lim_{n\to\infty} \mu\left((-\infty, x_1 - \tfrac{1}{n}] \times \cdots \times (-\infty, x_d - \tfrac{1}{n}]\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} F_\mu\left(x_1 - \tfrac{1}{n}, \cdots, x_d - \tfrac{1}{n}\right) \underset{F_\mu\text{の}x\text{における連続性}}{=} F_\mu(x)$$
$$= \mu(I).$$

よって, $\overline{I} = I$ なので $\mu(\partial I) = \mu(I \setminus \mathrm{int}\, I) = \mu(I) - \mu(\mathrm{int}\, I) = 0$ であり, 故に(4)により $F_{\mu_n}(x) = \mu_n(I) \xrightarrow[n\to\infty]{(4)} \mu(I) = F_\mu(x)$.

(6)⟹(1) $k \in \mathbb{N}$ とし, $g_k : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ を $g_k(x) := (\min\{k - |x|, 1\})^+$ で定めると, 明らかに g_k は連続, $|x| \leqq k-1$ なら $g_k(x) = 1$, $|x| \geqq k$ なら $g_k(x) = 0$, また $\mathbb{R}^d$ 上 $0 \leqq g_k \leqq g_{k+1} \leqq 1$ である.

さて, $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ とし $M := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ とおく. すると $\mathbb{R}^d$ 上 $f + M \geqq 0$ であり, また $(f+M) g_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$ であるので(6)の仮定により

$$\left.\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n + M &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f+M)\, d\mu_n \\ &\underset{f+M\geqq 0,\, g_k \leqq 1}{\geqq} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f+M) g_k\, d\mu_n \\ &\overset{(6)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f+M) g_k\, d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f+M) g_k\, d\mu. \end{aligned}\right\} \cdots (7.3)$$

$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f+M) g_k\, d\mu \underset{\text{MCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} (f+M) \cdot 1\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu + M$

であるので, (7.3) で $k \to \infty$ とした後両辺に $-M$ を加えることで $\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n \geqq \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu$ を得る. さらに f の代わりに $-f$ とすれば

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n = -\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (-f)\, d\mu_n \leqq -\int_{\mathbb{R}^d} (-f)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu$$
$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n \leqq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n.$$

$\therefore \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n$, すなわち $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.