$\boxed{(5)\Longrightarrow(6)}$ $d=1$の場合のみ証明する.(一般の場合は(一)Thm4.10)

$C_\mu := \{a\in\mathbb{R} \mid \mu(\{a\})=0\}$とおく. F_μは非減少であることを思い出そう.

● $\forall x\in C_\mu$, F_μはxにおいて連続.

∵ $x\in C_\mu$とする. $\mu(\{x\})=0$なのでProp1.6-(3)より

$F_\mu(x)=\mu((-\infty,x])=\mu((-\infty,x))+\mu(\{x\})$

$\overset{\text{Prop1.6(3)}}{=} \lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-\frac{1}{n}])+0=\lim_{n\to\infty}F_\mu(x-\frac{1}{n})$.

そこで$\varepsilon\in(0,\infty)$に対し$\exists N\in\mathbb{N}$, $F_\mu(x)-F_\mu(x-\frac{1}{N})<\varepsilon$となり,

すると$\forall y\in[x-\frac{1}{N},x)$, $0\leqq F_\mu(x)-F_\mu(y)\leqq F_\mu(x)-F_\mu(x-\frac{1}{N})<\varepsilon$.

これは$\lim_{y\nearrow x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$を意味し, Thm7.10より$\lim_{y\searrow x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$

であることと合わせて$\lim_{y\to x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$, つまり$F_\mu$は$x$において<u>連続</u>. //

● $\mathbb{R}\setminus C_\mu$は可算集合である.

∵ $D_{\mu,n}:=\{a\in\mathbb{R}\mid \mu(\{a\})\geqq\frac{1}{n}\}$とおくと$\mathbb{R}\setminus C_\mu=\bigcup_{n=1}^\infty D_{\mu,n}$

なので, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\#D_{\mu,n}\leqq n$を示せばよい. 実際, $n\in\mathbb{N}$

とし$\#D_{\mu,n}\geqq n+1$と仮定すると, $D_{\mu,n}$は相異なる$(n+1)$個

の元$a_1,\cdots,a_{n+1}$を持つことになり, このとき$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$より

$1=\mu(\mathbb{R})\geqq\mu(\bigcup_{k=1}^{n+1}\{a_k\})=\sum_{k=1}^{n+1}\mu(\{a_k\})\geqq(n+1)\cdot\frac{1}{n}>1$

となるので矛盾する. よって$\#D_{\mu,n}\leqq n$, 特に$\mathbb{R}\setminus C_\mu=\bigcup_{n=1}^\infty D_{\mu,n}$

は(有限集合の可算和なので)可算<u>集合である</u>. //

● C_μは$\mathbb{R}$において稠密, つまり$\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a<b\Rightarrow C_\mu\cap(a,b)\neq\emptyset$.

∵ $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とすると, (a,b)は非可算なので可算集合$\mathbb{R}\setminus C_\mu$

に含まれることができない, すなわち$\exists x\in(a,b)$, $x\notin\mathbb{R}\setminus C_\mu$,

となり, すると$x\in C_\mu\cap(a,b)$, 特に$\underline{C_\mu\cap(a,b)\neq\emptyset}$. //

さて, (6)を示すために, $f\in C_c(\mathbb{R})$とし$N\in\mathbb{N}$を$f|_{\mathbb{R}\setminus[-N+1,N-1]}=0$

となるように取る. $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. ($[-N,N]$のコンパクト性により)

fは<u>$[-N,N]$上で一様連続</u>であるので, $\exists\delta\in(0,1)$, $\forall x,y\in[-N,N]$,

$|x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 実は今, この$\delta$に対し

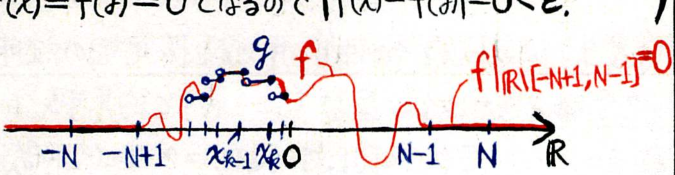
$$\forall x,y\in\underline{\mathbb{R}},\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \quad\cdots\cdots(7.4)$$

(∵ $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta$とする. $x,y\in[-N,N]$ならばδの取り方より

$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. $x\in\mathbb{R}\setminus[-N,N]$もしくは$y\in\mathbb{R}\setminus[-N,N]$ならば,

$|x-y|<\delta<1$より$x,y\in\mathbb{R}\setminus[-N+1,N-1]$であり, 従って$N$の取り方

から$f(x)=f(y)=0$となるので$|f(x)-f(y)|=0<\varepsilon$.)



(f: $[-N,N]$上で一様連続, より<u>$\mathbb{R}$上でも</u>一様連続((7.4)))

C_μは$\mathbb{R}$において稠密なので, 各$k\in\mathbb{Z}$に対し$x_k\in C_\mu$を

$k\frac{\delta}{2}<x_k<(k+1)\frac{\delta}{2}$となるように選ぶことができ, このとき

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad x_k<x_{k+1}<x_k+\delta. \quad\cdots\cdots(7.5)$$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を次で定義する:

$$g:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x_k)\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}. \quad\cdots\cdots(7.6)$$

($f|_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]}=0$より, $|k|\geqq\frac{2N}{\delta}+1$なる$k\in\mathbb{Z}$に対しては$f(x_k)=0$,

従って(7.6)の右辺の和は実際には有限和である.)

<u>claim1</u> $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

∵ $x\in\mathbb{R}$とする. このとき$\exists 1 k\in\mathbb{Z}$, $x\in(x_{k-1},x_k]$であり, すると

$|x-x_k|<\delta$, また$g(x)=f(x_k)$であるので, (7.4)により

$|f(x)-g(x)|=|f(x)-f(x_k)|<\varepsilon$. // (claim1)

<u>claim2</u> $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu$.

∵ 各$k\in\mathbb{Z}$に対し, $x_{k-1},x_k\in C_\mu$よりF_μはx_{k-1},x_kにおいて

連続であり, 従って(5)により

$\mu_n((x_{k-1},x_k])=F_{\mu_n}(x_k)-F_{\mu_n}(x_{k-1})$

$\xrightarrow[n\to\infty]{(5)}F_\mu(x_k)-F_\mu(x_{k-1})=\mu((x_{k-1},x_k])$.

$\therefore \int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n=\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|<1+2N/\delta}f(x_k)\mu_n((x_{k-1},x_k])$

$\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|<1+2N/\delta}f(x_k)\mu((x_{k-1},x_k])=\underline{\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu}$ // (claim2)

さて, するとclaim2により$\exists l\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq l$, $|\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu|<\varepsilon$

であり, よってclaim1を用いれば$\forall n\geqq l$に対し

$|\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu|$

$=|\int_{\mathbb{R}}(f-g)\,d\mu_n+(\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu)+\int_{\mathbb{R}}(g-f)\,d\mu|$

$\leqq\int_{\mathbb{R}}|f-g|\,d\mu_n+|\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu|+\int_{\mathbb{R}}|g-f|\,d\mu$

$\underset{\substack{\text{claim1}\\ n\geqq l}}{<}\varepsilon\mu_n(\mathbb{R})+\varepsilon+\varepsilon\mu(\mathbb{R})=3\varepsilon$.

ゆえに$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu$. ■

<u>Thm 7.12</u> $K\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$とするとき, 次の(1),(2)は互いに同値である:

(1) Kは<u>緊密(tight)</u>, すなわち$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)=0$.

(2) $\forall\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset K$, $\exists\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$狭義単調増加,

$\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

(注 $K=\emptyset$のときは(1)における$\sup_{\mu\in K}(\cdots)$は0と約束する.)

∵ $\boxed{(2)\Longrightarrow(1)}$ $\{\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)\}_{N=1}^\infty$が非増加であることに

注意して, $\varepsilon:=\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)$とおく. 明らかに$\varepsilon\geqq0$.

背理法で証明するために, $\varepsilon>0$と仮定する. するとこのとき,

各$n\in\mathbb{N}$に対し$\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-n,n]^d)\geqq\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2}$であるので$\mu_n\in K$を$\mu_n(\mathbb{R}^d\setminus[-n,n]^d)>\frac{\varepsilon}{2}$となるように取ることができる. そこで(2)よりこの$\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset K$に対し$\exists\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$狭義単調増加, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$となるが, さらに$N\in\mathbb{N}$に対し

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2}&\leqq\limsup_{k\to\infty}\mu_{n(k)}(\mathbb{R}^d\setminus[-n(k),n(k)]^d)\\&\leqq\limsup_{k\to\infty}\mu_{n(k)}(\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d)\quad\left(\because k\geqq N\text{ に対し }n(k)\geqq N\text{ より }\mathbb{R}^d\setminus[-n(k),n(k)]^d\subset\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\right)\\&\leqq\mu(\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d)\quad\left(\because \mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\underset{\text{閉}}{\subset}\mathbb{R}^d,\ \mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu,\ \text{Thm7.11-(3)}\right)\\&\xrightarrow[\text{Prop1.6-(4)}]{N\to\infty}\mu\left(\bigcap_{N=1}^\infty\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\right)=\mu(\emptyset)=0.\end{aligned}$$

∴ $\frac{\varepsilon}{2}\leqq0$となり, $\varepsilon>0$と仮定していたことに矛盾する. よって$\varepsilon=0$, すなわち$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)=0$.

(1)⟹(2) $d=1$の場合のみ証明する.(一般の場合はI-I Thm4.12)
$\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset K$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$F_n:=F_{\mu_n}$とおく. $\mathbb{Q}$が可算無限集合であることに注意して, 全単射$\mathbb{N}\ni k\mapsto q_k\in\mathbb{Q}$を取る.
$\{n(0,l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$を$n(0,l):=l$と定め, 各$k\in\mathbb{N}$に対し狭義単調増加な$\{n(k,l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$を次のようにして帰納的に定める:
[$\{n(k-1,l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$は既に定義済として, $\{F_{n(k-1,l)}(q_k)\}_{l=1}^\infty\subset[0,1]$なのでBolzano-Weierstrassの定理により$\exists\{l(j)\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{N}$狭義単調増加, $\exists\lim_{j\to\infty}F_{n(k-1,l(j))}(q_k)\in\mathbb{R}$. そこでここで現れた$\{n(k-1,l(j))\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{N}$なる狭義単調増加列を(添字を$j$から$l$に変更して)$\{n(k,l)\}_{l=1}^\infty$と定める.

$$\begin{array}{l}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}\\ \quad\cup\\ \{n(1,1),n(1,2),n(1,3),n(1,4),n(1,5),\cdots\}\\ \quad\cup\\ \{n(2,1),n(2,2),n(2,3),n(2,4),n(2,5),\cdots\}\\ \quad\cup\\ \{n(3,1),n(3,2),n(3,3),n(3,4),n(3,5),\cdots\}\\ \quad\cup\\ \{n(4,1),n(4,2),n(4,3),n(4,4),n(4,5),\cdots\}\\ \quad\cup\\ \quad\vdots\end{array}$$

$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \exists\lim_{l\to\infty}F_{n(k,l)}(q_k)\in\mathbb{R}}$ …(7.7)

$\{n(l)\}_{l=1}^\infty$ ($n(l):=n(l,l)$)
(対角線論法)

そこで$n(l):=n(l,l)$と定めると, $\{n(l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$は狭義単調増加であり, また$\forall k\in\mathbb{N}$に対し$\{n(l)\}_{l=k}^\infty$は$\{n(k,l)\}_{l=1}^\infty$の部分列なので(7.7)により$\exists\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q_k)\in\mathbb{R}$. すなわち:

$\boxed{\exists\{n(l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}\text{ 狭義単調増加},\ \forall q\in\mathbb{Q},\ \rho(q):=\exists\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)\in[0,1].}$

1月14日ここから

12月24日ここまで

さて, $F:\mathbb{R}\to[0,1]$を各$x\in\mathbb{R}$に対し

$$F(x):=\inf_{q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(q)$$ により定義する.

● Fは単調非減少($\because x\leqq y\Rightarrow\mathbb{Q}\cap(x,\infty)\supset\mathbb{Q}\cap(y,\infty)\Rightarrow F(x)\leqq F(y)$)
● Fは右連続.
∵ $x\in\mathbb{R}$とする. $\varepsilon\in(0,\infty)$とすると$\exists q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$, $\rho(q)<F(x)+\varepsilon$であるが, このとき$\forall y\in(x,q)$に対し, $q\in\mathbb{Q}\cap(y,\infty)$より$F(y)\leqq\rho(q)$, 従って$F(x)\leqq F(y)\leqq\rho(q)<F(x)+\varepsilon$. ∴ $\lim_{y\downarrow x}F(y)=F(x)$.
● $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.
∵ $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. (1)(Kは緊密)より,

$$\exists N\in\mathbb{N},\quad\sup_{l\in\mathbb{N}}\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N])<\varepsilon.\quad\cdots\cdots(7.8)$$

すると$x\in[N,\infty)$に対し, $\forall q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$, $[-N,N]\subset(-\infty,q]$. 従って

$$\begin{aligned}\rho(q)&=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)=\lim_{l\to\infty}\mu_{n(l)}((-\infty,q])\\&\geqq\limsup_{l\to\infty}\mu_{n(l)}([-N,N])=\limsup_{l\to\infty}(1-\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N]))\overset{(7.8)}{\geqq}1-\varepsilon\end{aligned}$$

であるので$1\geqq F(x)=\inf_{q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(q)\geqq1-\varepsilon$.
他方$x\in(-\infty,-N)$に対しては, $q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$を$q<-N$となるように取ることができ, すると$(-\infty,q]\subset\mathbb{R}\setminus[-N,N]$となるので

$$\begin{aligned}0\leqq F(x)\leqq\rho(q)&=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)=\lim_{l\to\infty}\mu_{n(l)}((-\infty,q])\\&\leqq\liminf_{l\to\infty}\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N])\overset{(7.8)}{\leqq}\varepsilon.\end{aligned}$$

以上より$\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.

Fの上記の3性質とThm7.10から, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $F=F_\mu$.
claim $\mu_{n(l)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.
∵ Thm7.11-"(5)⟹(1)"より, $x\in\mathbb{R}$でFはxにおいて連続であると仮定して, $\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=F(x)$を示せばよい. $p<q<x<r$を満たす$p,q,r\in\mathbb{Q}$を任意に取る. このとき

$$\begin{aligned}F(p)\leqq\rho(q)&=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)\leqq\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\\&\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(r)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(r)=\rho(r).\end{aligned}$$

$\lim_{y\uparrow x}F(y)=F(x)$と仮定しているので, 上記の不等式において$p\uparrow x$と$\inf_{r\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}$を取れば

$$\begin{aligned}F(x)=\lim_{\mathbb{Q}\ni p\uparrow x}F(p)&\leqq\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\\&\leqq\inf_{r\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(r)=F(x)\end{aligned}$$

となるので, $F(x)=\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)$.
以上で(1)⟹(2)が示せ, Thm7.12の証明が完了した. ■

§8 特性関数とその性質, 中心極限定理の証明

記号 ● 本§ではiは虚数単位を表すと約束する.
● $z=x+iy\in\mathbb{C}$ ($x,y\in\mathbb{R}$)に対し$\mathrm{Re}(z):=x$, $\mathrm{Im}(z):=y$, $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$, $\bar{z}:=x-iy$とおき, それぞれzの実部, 虚部, 絶対値, 複素共役という. $z\bar{z}=|z|^2$に注意.