8.0 $\mathbb{C}$-値関数の積分の定義と基本性質

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

Def 8.1 $f: X\to\mathbb{C}$ とする.
f が $\mathcal{M}$-可測 $\overset{def}{\iff}$ $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{M}$.
($\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の同一視により, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と同一視される)

Prop 8.2 $f: X\to\mathbb{C}$ とするとき,
f が $\mathcal{M}$-可測 $\iff$ $Re(f), Im(f)$ が ($\mathbb{R}$-値関数として) $\mathcal{M}$-可測.

∵ f が $\mathcal{M}$-可測 $\iff \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),\ f^{-1}(A)\in\mathcal{M}$
$\overset{\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2}{\iff} \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ (Re(f),Im(f))^{-1}(A)\in\mathcal{M}$
Prop2.3と全く同様 $\overset{?}{\iff}$ $Re(f), Im(f)$ が $\mathcal{M}$-可測. ■

系 8.3 $f, g: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測ならば,
$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$
により定義される $f+g, f\cdot g: X\to\mathbb{C}$ も $\mathcal{M}$-可測.

∵ $\mathbb{C}$ における和と積の定義により
$Re(f+g)=Re(f)+Re(g)$, $Im(f+g)=Im(f)+Im(g)$,
$Re(fg)=Re(f)Re(g)-Im(f)Im(g)$,
$Im(fg)=Re(f)Im(g)+Im(f)Re(g)$
であり, Prop 8.2 と Prop 1.12 によりこれらは全て $\mathcal{M}$-可測である. 従って Prop 8.2 を再度用いることにより $f+g$, $f\cdot g$ が $\mathcal{M}$-可測であることが分かる. ■

Lemma 8.4 $f: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測ならば,
$|f|: X\to[0,\infty)$ もまた $\mathcal{M}$-可測.

∵ $G:\mathbb{C}\to[0,\infty)$ を $G(z):=|z|$ で定めると, $z,w\in\mathbb{C}$ に対し3角不等式より $|z|\leq|z-w|+|w|$ かつ $|w|\leq|w-z|+|z|$. すなわち $|G(z)-G(w)|=\big||z|-|w|\big|\leq|z-w|$ となるので, G は $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ 上の $\mathbb{R}$-値連続関数であり, 従って Lemma 1.15 により G は $\mathcal{B}(\mathbb{C})$-可測である.
すると $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $|f|=G\circ f$ に注意すれば,
$|f|^{-1}(A)=(G\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(G^{-1}(A))\in\mathcal{M}$
であることが, G: $\mathcal{B}(\mathbb{C})$-可測より $G^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ であることと $f: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測であることから分かる.
よって $|f|$ も $\mathcal{M}$-可測. ■

Def 8.5 (積分の定義III: $\mathbb{C}$-値関数)

(1) $f: X\to\mathbb{C}$ $\mathcal{M}$-可測 に対し
▷ f: μ-可積分 $\overset{def}{\iff} \int_X|f|\,d\mu<\infty$
$\iff$ $Re(f), Im(f)$ が ($\mathbb{R}$-値関数として) μ-可積分
($\max\{|Re(f)|,|Im(f)|\}\leq|f|\leq|Re(f)|+|Im(f)|$ と Thm 1.18-(2),(3))

▷ f: μ-可積分のとき $\boxed{\int_X f\,d\mu:=\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu}$

(2) $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu,\mathbb{C}):=\mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C}):=\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$
$:=\{f: X\to\mathbb{C}\mid f$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分$\}$.

(注 f が $\mathbb{R}$-値(つまり $Im(f)=0$)のときは, Def 8.5-(1) は Def 1.22-(1) と一致)

Prop 8.6 (積分の性質III: $\mathbb{C}$-値関数)

(1) $f\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ ならば $\left|\int_X f\,d\mu\right|\leq\int_X|f|\,d\mu$.

(2) (線型性) $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ とするとき,
$\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ かつ
$$\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu.$$

∵ (2) まず, 系 8.3 より $\alpha f+\beta g$ は $\mathcal{M}$-可測であり, また $|\alpha f+\beta g|\leq|\alpha|\cdot|f|+|\beta|\cdot|g|$ なので Thm 1.18-(2),(3) より
$\int_X|\alpha f+\beta g|\,d\mu\leq\int_X(|\alpha|\cdot|f|+|\beta|\cdot|g|)\,d\mu$
$=|\alpha|\int_X|f|\,d\mu+|\beta|\int_X|g|\,d\mu<\infty$.
$\therefore\ \alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$.

claim1 $\int_X(f+g)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$.
∵ $\int_X(f+g)\,d\mu=\int_X Re(f+g)\,d\mu+i\int_X Im(f+g)\,d\mu$
$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}\int_X(Re(f)+Re(g))\,d\mu+i\int_X(Im(f)+Im(g))\,d\mu$
$\overset{\text{Thm1.24-(2)}}{=}\int_X Re(f)\,d\mu+\int_X Re(g)\,d\mu+i\left(\int_X Im(f)\,d\mu+\int_X Im(g)\,d\mu\right)$
$=\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu+\int_X Re(g)\,d\mu+i\int_X Im(g)\,d\mu$
$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$. // (claim1)

claim2 $a\in\mathbb{R}$ に対し $\int_X af\,d\mu=a\int_X f\,d\mu$.
∵ $\int_X af\,d\mu=\int_X(aRe(f)+iaIm(f))\,d\mu$
$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}\int_X aRe(f)\,d\mu+i\int_X aIm(f)\,d\mu$
$\overset{\text{Thm1.24-(2)}}{=}a\int_X Re(f)\,d\mu+i\cdot a\int_X Im(f)\,d\mu$
$=a\left(\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu\right)$
$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}a\int_X f\,d\mu$. // (claim2)

<u>claim3</u> $\int_X if\,d\mu = i\int_X f\,d\mu$.

∵ $\int_X if\,d\mu = \int_X(-\mathrm{Im}(f)+i\mathrm{Re}(f))\,d\mu$

Def8.5-(1) $= \int_X(-\mathrm{Im}(f))\,d\mu + i\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu$

Thm1.24-(2) $= -\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu$

$= i\left(\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu\right)$

Def8.5-(1) $= i\int_X f\,d\mu$ // (claim3)

<u>claim4</u> $\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$.

∵ $\alpha = a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ と書いておくと,

$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X(af+b\cdot if)\,d\mu$

claim1 $= \int_X af\,d\mu + \int_X b\cdot if\,d\mu$

claim2 $= a\int_X f\,d\mu + b\int_X if\,d\mu$

claim3 $= a\int_X f\,d\mu + b\cdot i\int_X f\,d\mu$

$= (a+bi)\int_X f\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$ // (claim4)

(2)の主張はclaim1とclaim4から従う.

(1) $\int_X f\,d\mu = 0$ のときは $\alpha := 1$ とおき,
$\int_X f\,d\mu \neq 0$ のときは $\alpha := \left|\int_X f\,d\mu\right|\cdot\left(\int_X f\,d\mu\right)^{-1}$
とおくと, $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha\int_X f\,d\mu$.
よって(2)を用いると

$\mathbb{R}\ni\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha\int_X f\,d\mu \underset{(2)}{=} \int_X \alpha f\,d\mu$

Def8.5-(1) $= \int_X \mathrm{Re}(\alpha f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(\alpha f)\,d\mu$.

この各辺の実部を取ると, $\mathrm{Re}(\alpha f) \leqq |\alpha f| = |\alpha||f| = |f|$
なので $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \int_X \mathrm{Re}(\alpha f)\,d\mu$

Thm1.24-(1) $\leqq \int_X |f|\,d\mu$. ■

<u>Thm 8.7</u> (像測度定理($\mathbb{C}$-値関数)) $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$を確率空間とする.
$d\in\mathbb{N}$ とし, X を d-dim. r.v. とする. また $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする. このとき

- $f(X) := f\circ X : \Omega\to\mathbb{C}$ は $\mathcal{F}$-可測.
- $f(X)$ が $\mathbb{P}$-可積分 $\Longleftrightarrow$ f が $\mathbb{P}_X$-可積分.
- 「可積分」のとき $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$.

∵ $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ は Prop 8.2 により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測であり, 従って Prop 2.4 により $\mathrm{Re}(f(X)) = (\mathrm{Re}(f))\circ X$ および $\mathrm{Im}(f(X)) = (\mathrm{Im}(f))\circ X$ は real r.v.'s, すなわち Ω上の$\mathcal{F}$-可測な$\mathbb{R}$-値関数である. よって再び Prop 8.2 により $f(X)$ は $\mathcal{F}$-可測.

さて, Lemma 8.4 より $|f|:\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測なので, Thm 2.10(2) により

$\mathbb{E}[|f(X)|] = \mathbb{E}[|f|(X)] = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathbb{P}_X(dx)$,

特に $f(X)$が$\mathbb{P}$-可積分 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}[|f(X)|]<\infty$ $\Longleftrightarrow$
fが$\mathbb{P}_X$-可積分 $\Longleftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathbb{P}_X(dx)<\infty$

さらに $f(X)$が$\mathbb{P}$-可積分のとき, その実部 $(\mathrm{Re}(f))\circ X$ と虚部 $(\mathrm{Im}(f))\circ X$ は $\mathbb{P}$-可積分なので再び Thm2.10-(2)より

$\mathbb{E}[\mathrm{Re}(f(X))] = \mathbb{E}[(\mathrm{Re}(f))\circ X] = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Re}(f)(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$,

$\mathbb{E}[\mathrm{Im}(f(X))] = \mathbb{E}[(\mathrm{Im}(f))\circ X] = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}(f)(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$.

$\mathbb{E}[f(X)]$, $\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ はこれらの値をそれぞれ実部と虚部に持つので, $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$. ■

8.1 特性関数とその性質

● $\theta\in\mathbb{R}$ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,
従って $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|e^{i\theta}|=1$, $\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$.

以下, 簡単のため実確率変数の場合のみ考える.
(同様の事実はすべてd次元確率変数に対し証明できる)

<u>Def 8.8</u> (特性関数)

(1) $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し, その<u>特性関数</u> $\varphi_\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)$$

で定める. ここで $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^{itx} = \cos(tx)+i\sin(tx)$ の実部, 虚部は$\mathbb{R}$上の有界連続関数であり, 従って積分 $\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)$ が定まることに注意されたい.

(2) Real r.v. X に対しその<u>特性関数</u> $\varphi_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] \underset{\text{Thm8.7}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mathbb{P}_X(dx)$$

で定める. つまり φ_XとはXの分布 $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}(X)$ の特性関数 $\varphi_{\mathcal{L}(X)}$ に他ならない.

<u>Prop 8.9</u> $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し, その特性関数φ_μは次を満たす:

(φ1) $\varphi_\mu(0)=1$. (φ2) $\forall t\in\mathbb{R}$, $|\varphi_\mu(t)|\leqq 1$, $\varphi_\mu(-t) = \overline{\varphi_\mu(t)}$.

(φ3) φ_μ は$\mathbb{R}$上で一様連続である.