∵ (φ1) $\varphi_\mu(0)=\int_{\mathbb{R}}1\,\mu(dx)=\mu(\mathbb{R})=1$.

(φ2) $t\in\mathbb{R}$とする. Prop 8.6-(1)より

$$|\varphi_\mu(t)|=\left|\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\mu(dx)\right|\leqq\int_{\mathbb{R}}|e^{itx}|\mu(dx)=\mu(\mathbb{R})=1$$

また, $e^{i(-t)x}=e^{-itx}=\cos(tx)-i\sin(tx)$なので

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(-t)&=\int_{\mathbb{R}}e^{i(-t)x}\mu(dx)\\&=\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\mu(dx)+i\int_{\mathbb{R}}(-\sin(tx))\mu(dx)\\&=\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\mu(dx)-i\int_{\mathbb{R}}\sin(tx)\mu(dx)\\&=\overline{\varphi_\mu(t)}.\end{aligned}$$

(φ3) まずφ_μが0において連続であることを示そう. そのためには, $\lim_{n\to\infty}h_n=0$を満たす$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$を任意に取り, $\lim_{n\to\infty}\varphi_\mu(h_n)=\varphi_\mu(0)$となることを示せばよい. 実際 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$に対し $|e^{ih_nx}|\leqq1$であり$\int_{\mathbb{R}}1\mu(dx)=1<\infty$, かつ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}e^{ih_nx}=e^0=1$であるので

$$\varphi_\mu(h_n)=\int_{\mathbb{R}}e^{ih_nx}\mu(dx)\xrightarrow[n\to\infty]{DCT}\int_{\mathbb{R}}1\mu(dx)=\varphi_\mu(0).$$

よってφ_μは0において連続である.

さて, $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. φ_μの0における連続性と$\varphi_\mu(0)=1$より, $\exists\delta\in(0,\infty)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)$,

$$|1-\varphi_\mu(h)|<\frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad\text{......}\ (8.1)$$

そこで$|s-t|<\delta$を満たす$s,t\in\mathbb{R}$を任意に取り $h:=s-t$とおくと, $|e^{ihx}-1|^2=2-2\mathrm{Re}(e^{ihx})$なので

$$\begin{aligned}|\varphi_\mu(s)-\varphi_\mu(t)|&=\left|\int_{\mathbb{R}}(e^{ix(t+h)}-e^{ixt})\mu(dx)\right|\\&\overset{\text{Prop 8.6-(1)}}{\leqq}\int_{\mathbb{R}}|e^{ixt}|\cdot|e^{ixh}-1|\mu(dx)\\&\overset{\text{Prop 2.7-(2)}}{\leqq}\left(\int_{\mathbb{R}}|e^{ixt}|^2\mu(dx)\int_{\mathbb{R}}|e^{ixh}-1|^2\mu(dx)\right)^{1/2}\\&=\left(\int_{\mathbb{R}}(2-2\mathrm{Re}(e^{ihx}))\mu(dx)\right)^{1/2}\\&=\sqrt{2-2\mathrm{Re}(\varphi_\mu(h))}\\&=\sqrt{\mathrm{Re}(2-2\varphi_\mu(h))}\\&\leqq|2-2\varphi_\mu(h)|^{1/2}\underset{(8.1)}{<}\varepsilon.\end{aligned}$$

よってφ_μは$\mathbb{R}$上で一様連続である. ■

Thm 8.10 Xをreal r.v.とし, $n\in\mathbb{N}$とする. このとき, $\mathbb{E}[|X|^n]<\infty$ならば, Xの特性関数φ_XはC^n-級(つまりn階導関数が存在して$\mathbb{R}$上連続)であり, さらに $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t)=i^k\mathbb{E}[X^ke^{itX}]$.
特に $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $\mathbb{E}[X^k]=(-i)^k\varphi_X^{(k)}(0)$.

∵ $k\in\{0,1,\cdots,n\}$とする. $|X|^k\leqq1+|X|^n1_{\{|X|\geqq1\}}$より

$$\mathbb{E}[|X|^k]\leqq\mathbb{E}[1+|X|^n]=1+\mathbb{E}[|X|^n]<\infty$$

(ただし$k=0$のときは$X^k:=1=:|X|^k$と定める)

であることに注意すると, $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$を

$f_k(t):=i^k\mathbb{E}[X^ke^{itX}]$ により定義できる. ($f_0=\varphi_X$)

claim1 f_kは連続.

∵ $t\in\mathbb{R}$とし, $\lim_{l\to\infty}t_l=t$を満たす$\{t_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$を任意にとる. このとき$\lim_{l\to\infty}X^ke^{it_lX}=X^ke^{itX}$であり, また $\forall l\in\mathbb{N}$, $|X^ke^{it_lX}|=|X|^k$ かつ $\mathbb{E}[|X|^k]<\infty$なので,

$$f_k(t_l)=i^k\mathbb{E}[X^ke^{it_lX}]\xrightarrow[DCT]{l\to\infty}i^k\mathbb{E}[X^ke^{itX}]=f_k(t).$$

これはf_kがtにおいて連続であることを意味する. //(claim1)

claim2 $k<n$ならば $f_k'=f_{k+1}$.

∵ $t\in\mathbb{R}$とし, $\lim_{l\to\infty}h_l=0$を満たす$\{h_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$を任意に取る. このとき, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\leqq|x|$に注意すると, $\forall l\in\mathbb{N}$に対し

$$\begin{aligned}|X^ke^{itX}\cdot h_l^{-1}(e^{ih_lX}-1)|&=|X|^k|h_l|^{-1}|e^{ih_lX}-1|\\&=|X|^k|h_l|^{-1}\sqrt{2-2\cos(h_lX)}\\&=|X|^k|h_l|^{-1}\left|2\sin\frac{h_lX}{2}\right|\\&\leqq|X|^{k+1},\end{aligned}$$

かつ$\mathbb{E}[|X|^{k+1}]<\infty$であり, さらに

$\lim_{l\to\infty}X^ke^{itX}h_l^{-1}(e^{ih_lX}-1)=iX^{k+1}e^{itX}$ なので,

$$\begin{aligned}&h_l^{-1}(f_k(t+h_l)-f_k(t))\\&=i^k\mathbb{E}[X^ke^{itX}\cdot h_l^{-1}(e^{ih_lX}-1)]\\&\xrightarrow[DCT]{l\to\infty}i^k\mathbb{E}[iX^{k+1}e^{itX}]=i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1}e^{itX}]=f_{k+1}(t).\end{aligned}$$

$\{h_l\}_{l=1}^{\infty}$の任意性よりこれは

$\lim_{h\to0}h^{-1}(f_k(t+h)-f_k(t))=f_{k+1}(t)$,

すなわち $f_k'(t)=f_{k+1}(t)$を意味する. //(claim2)

Thm 8.10はclaim2, claim1から明らか. ■

Thm 8.11 Xをreal r.v.とし, $n\in\mathbb{N}$とする. このとき, もし $\exists a\in(0,\infty)$, Xの特性関数φ_Xが$(-a,a)$上で$(2n-1)$階導関数$\varphi_X^{(2n-1)}$を持ち, さらに$\varphi_X^{(2n)}(0)$が存在すれば$\mathbb{E}[X^{2n}]<\infty$.

Lemma 8.12 $a\in(0,\infty)$とし, $f:(-a,a)\to\mathbb{C}$は微分可能とする. このとき, もし$f''(0)$が存在するならば

$\boxed{o(h^2)}$ この部分を $g(h)$ と書くとき $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}=0$ であることを表す記号

$h\to 0$ のとき $f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2)$
であり，さらに $f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}$.

☺ $F:(-a,a)\to\mathbb{C}$ を
$$F(x):=f(x)-f(0)-f'(0)x-\frac{1}{2}f''(0)x^2$$
で定める. このとき $\forall x\in(-a,a)$, $F'(x)=f'(x)-f'(0)-f''(0)x$
であり，するとさらに $F''(0)=f''(0)-f''(0)=0$.
$F'(0)=0$ でありかつ $F''(0)=0$ であるので，$F''(0)$ の定義により，$\varepsilon\in(0,\infty)$ を任意に取るとき $\exists\delta\in(0,a)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$,
$$\left|\frac{F'(h)-F'(0)}{h}-F''(0)\right|=\left|\frac{F'(h)}{h}\right|<\varepsilon$$
となるが，さらにそのような h に対し，平均値の定理により $\exists\theta_h\in(0,1)$, $F(h)=F(h)-0=F(h)-F(0)=hF'(\theta_h h)$,
従って
$$\frac{1}{h^2}\left|f(h)-f(0)-f'(0)h-\frac{1}{2}f''(0)h^2\right|=\frac{|F(h)|}{h^2}=\frac{|h\cdot F'(\theta_h h)|}{h^2}=\frac{|F'(\theta_h h)|}{|h|}<\frac{\varepsilon|\theta_h h|}{|h|}<\varepsilon$$
となり第1の主張を得る. これにより
$f(h)+f(-h)-2f(0)=f''(0)h^2+o(h^2)$ ($h\to 0$ のとき)
となるのでさらに $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=f''(0)$
も従う. ▨

Thm8.11の証明

$k\in\{0,\cdots,n\}$ に対し $E[X^{2k}]<\infty$ であることを数学的帰納法により証明する. $k=0$ のとき $X^{2k}=1$ なので $E[X^{2k}]=1<\infty$. 次に $k\in\{0,\cdots,n-1\}$ とし $E[X^{2k}]<\infty$ と仮定する. このとき Thm8.10より
$$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_X^{(2k)}(t)=(-1)^k E[X^{2k}e^{itX}]$$
であるので，Lemma8.12の2つ目の主張により
$$|\varphi_X^{(2k+2)}(0)|=\lim_{l\to\infty}\left|\frac{\varphi_X^{(2k)}(1/l)+\varphi_X^{(2k)}(-1/l)-2\varphi_X^{(2k)}(0)}{1/l^2}\right|$$
$$=\lim_{l\to\infty}E\left[X^{2k}\left(\frac{\sin\frac{X}{2l}}{\frac{1}{2l}}\right)^2\right]\underset{\text{Fatou}}{\geq}E[X^{2k+2}].$$
$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(xh)}{h}=x$

$\therefore E[X^{2k+2}]<\infty$.
よって帰納法により $E[X^{2n}]<\infty$. (Fatou=Prop1.21) ▨

Prop8.13 $n\in\mathbb{N}$ とし，$\{X_k\}_{k=1}^n$ は独立な real r.v.'s とする. このとき $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$.
特に，$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\{X_k\}_{k=1}^n$ は i.i.d. で $X_1\sim\mu$ ならば，
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\varphi_\mu(t)^n$.

☺ まず，Thm4.12-(2) は f が $\mathbb{C}$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測関数である場合にも成り立つことを注意しておく (f の実部と虚部それぞれに Thm4.12-(2) を用いればよい).
$t\in\mathbb{R}$ とし，$\varphi_{X_1+\cdots+X_k}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_k}(t)$ を $k\in\{1,\cdots,n\}$ についての数学的帰納法により示そう. $k=1$ のときは自明.
$k\in\{1,\cdots,n\}$, $k<n$ とし，この k に対し上の等式が成り立つと仮定する. $X:=X_1+\cdots+X_k$, $Y:=X_{k+1}$ とおくと，Prop4.13-(1),(3),(2) を順に用いることにより，$\{X,Y\}$ の独立性が分かる. 従って Thm4.12-(2) により
$$\varphi_{X_1+\cdots+X_{k+1}}(t)=\varphi_{X+Y}(t)=E[e^{it(X+Y)}]$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{it(x+y)}P_Y(dy)\right)P_X(dx)$$
$$\overset{\text{Prop8.6-(2)}}{=}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}\int_{\mathbb{R}}e^{ity}P_Y(dy)\right)P_X(dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}e^{ity}P_Y(dy)\cdot\int_{\mathbb{R}}e^{itx}P_X(dx)$$
$$=\varphi_Y(t)\varphi_X(t)\underset{\text{帰納法の仮定}}{=}\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_{k+1}}(t).$$
よって帰納法が完成し，1つ目の主張が示せた. 2つ目の主張は $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $\varphi_{X_k}=\varphi_{\mathcal{L}(X_k)}=\varphi_\mu$ であることと前半より従う. ▨

1月21日ここから　1月14日ここまで

例8.14 $m\in\mathbb{R}$, $v\in[0,\infty)$ とし，X は real r.v. で $X\sim N(m,v)$ とする. このとき $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X(t)=\exp(itm-\frac{1}{2}t^2v)$.

☺ $v=0$ なら $P[X=m]=1$ より $\varphi_X(t)=E[e^{itX}]=e^{itm}$.
そこで $v>0$ とする. Thm2.11-(2) を実部と虚部それぞれに用いて
$$\varphi_X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}P_X(dx)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx$$
$$\overset{x=m+\sqrt{v}y}{=}\int_{\mathbb{R}}e^{itm}\cdot e^{it\sqrt{v}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=e^{itm}\varphi_{N(0,1)}(t\sqrt{v})$$
そこで $m=0$, $v=1$ と仮定して示せばよい. このとき，例3.7 より $E[X^2]<\infty$ なので Thm8.10により
$$\varphi_X'(t)=iE[Xe^{itX}]\overset{\text{Thm8.7}}{=}i\int_{\mathbb{R}}xe^{itx}P_X(dx)$$
$$\overset{\text{Thm2.11-(2)}}{=}i\int_{\mathbb{R}}xe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$
$$\overset{\text{DCT}}{=}i\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}xe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$
$$=i\lim_{n\to\infty}\left(\left[-e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-n}^{n}+\int_{-n}^{n}ite^{itx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\right)$$
$$=i\int_{\mathbb{R}}ite^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=-t\varphi_X(t).$$
従って $(e^{t^2/2}\varphi_X(t))'=e^{t^2/2}(t\varphi_X(t)+\varphi_X'(t))=0$ となるので，$e^{t^2/2}\varphi_X(t)$ は定数 $e^{0^2/2}\varphi_X(0)=1$ に等しく，よって $\varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$. ▨