Thm8.15 (Lévyの反転公式)

$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$とし, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とする. このとき

$$\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\times\varphi_\mu(t)dt.$$

まず, 次の不等式が成り立つことに注意; $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right|=|e^{-itb}|\cdot\left|\frac{e^{it(b-a)}-1}{it}\right|\cdot|e^{itx}| \quad (8.2)$$
$$=\frac{\sqrt{2-2\cos(t(b-a))}}{|t|}=\frac{2\left|\sin\frac{t(b-a)}{2}\right|}{|t|}\leqq|b-a|.$$

さて, $A\in(0,\infty)$とする. (8.2)より

$$\int_{-A}^{A}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right|\mu(dx)\right)dt\leqq 2A|b-a|<\infty$$

であるのでFubiniの定理(Thm4.8-(2))が(実部と虚部それぞれに)使えて,

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_\mu(t)dt=\int_{-A}^{A}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\mu(dx)\right)dt$$
$$\underset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-A}^{A}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt\right)\mu(dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\cos(t(x-a))-\cos(t(x-b))}{it}}_{t\text{の奇関数}}dt+\int_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}}_{t\text{の偶関数}}dt\right)\mu(dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left(2\int_0^A\frac{\sin(t(x-a))}{t}dt-2\int_0^A\frac{\sin(t(x-b))}{t}dt\right)\mu(dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))\mu(dx) \quad (8.3)$$

(ただし$x\in\mathbb{R}$に対し$F(A,x):=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt$).

ここで次に述べるLemma 8.16により, (8.3)の被積分関数は,

- $\forall A\in(0,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|2F(A,x-a)-2F(A,x-b)|\leqq 4\|F\|_\infty<\infty$,
- $\displaystyle\lim_{A\to\infty}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,a)\cup(b,\infty),\\ \pi & x\in\{a,b\},\\ 2\pi & x\in(a,b),\end{cases}$

を満たす. 従って, $\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$ であるような$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,\infty)$を任意に取るとLebesgueの収束定理(Thm1.25, DCT)により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(2F(A_n,x-a)-2F(A_n,x-b))\mu(dx)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}(2\pi\mathbb{1}_{(a,b)}(x)+\pi\mathbb{1}_{\{a,b\}}(x))\mu(dx)$$
$$=2\pi\left(\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})\right)$$

となり, これは(8.3)に至るまでの計算と合わせると

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_\mu(t)dt=\int_{\mathbb{R}}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))\mu(dx)\xrightarrow[A\to\infty]{}2\pi\left(\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})\right)$$

の極限が成り立つことを意味する. これで主張が示せた. ■

Lemma8.16

$A\in(0,\infty)$, $x\in\mathbb{R}$に対し$F(A,x):=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt$とおく. このとき $\|F\|_\infty:=\sup_{(A,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}}|F(A,x)|<\infty$ であり, さらに

$$\lim_{A\to\infty}F(A,x)=\begin{cases}\pi/2 & x\in(0,\infty),\\ 0 & x=0,\\ -\pi/2 & x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

$A\in(0,\infty)$に対し$F_1(A):=F(A,1)$とおく. $\sin 0=0$より $F(A,0)=0\xrightarrow[A\to\infty]{}0$ なので$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$の場合のみ考えればよいが,

- $x\in(0,\infty)$に対し$F(A,x)=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt\underset{t=u/x}{=}\int_0^{Ax}\frac{\sin u}{u/x}\frac{1}{x}du=F_1(Ax)$,
- $x\in(-\infty,0)$に対し
$$F(A,x)=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt=-\int_0^A\frac{\sin(t|x|)}{t}dt=-F(A,|x|)=-F_1(A|x|)$$

であるので, 結局 $\sup_{A\in(0,\infty)}|F_1(A)|<\infty$ と $\lim_{A\to\infty}F_1(A)=\frac{\pi}{2}$ を示せばよい.

$A\in(0,\infty)$とする. $x\in(0,\infty)$に対し$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-xt}dt$であり, また

$$\int_0^A\left(\int_0^\infty|e^{-xt}\sin x|dt\right)dx=\int_0^A\frac{|\sin x|}{x}dx\leqq\int_0^A 1dx=A<\infty$$

であることに注意すると, Fubiniの定理(Thm4.8-(2))により

$$F_1(A)=\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^A\left(\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dt\right)dx \quad (8.4)$$
$$\underset{\text{Fubini}}{=}\int_0^\infty\left(\int_0^A e^{-xt}\sin x\,dx\right)dt.$$

さらに(8.4)の内側の積分を部分積分法を用いて計算すると

$$\int_0^A e^{-xt}\sin x\,dx=\left[-e^{-xt}\cos x\right]_0^A-t\int_0^A e^{-xt}\cos x\,dx$$
$$=1-e^{-At}\cos A-t\left(\left[e^{-xt}\sin x\right]_0^A+t\int_0^A e^{-xt}\sin x\,dx\right)$$
$$=1-e^{-At}(\cos A+t\sin A)-t^2\int_0^A e^{-xt}\sin x\,dx,$$

従って

$$\int_0^A e^{-xt}\sin x\,dx=\frac{1}{1+t^2}-e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2} \quad (8.5)$$

さらに $\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt\underset{\text{MCT}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{1+t^2}dt=\lim_{n\to\infty}[\mathrm{Arctan}\,t]_0^n=\frac{\pi}{2}$,

また $$\int_0^\infty\left|e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}\right|dt\leqq\int_0^\infty e^{-At}\frac{1+t}{1+t^2}dt\leqq\int_0^\infty 2e^{-At}dt=\frac{2}{A}\ (<\infty)$$

より $$\left|\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt\right|\leqq\int_0^\infty\left|e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}\right|dt\leqq\frac{2}{A} \quad (8.6)$$

であるので, (8.4), (8.5), (8.6)から

$$F_1(A)=\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt$$
$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt\xrightarrow[A\to\infty]{}\frac{\pi}{2}$$

かつ $A\geqq1$のとき $\frac{\pi}{2}-2\leqq F_1(A)\leqq\frac{\pi}{2}+2$ が分かる. また $0<A\leqq1$ のときは $|F_1(A)|\leqq\int_0^A\frac{|\sin x|}{x}dx\leqq\int_0^A 1dx=A\leqq1$ であるので, 合わせて $\sup_{A\in(0,\infty)}|F_1(A)|\leqq\frac{\pi}{2}+2<\infty$. ■

Thm8.15より次の重要な定理を得る.

Thm8.17 (特性関数の一意性定理)

$\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$が$\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_\mu(t)=\varphi_\nu(t)$を満たすならば, $\mu=\nu$.

<u>Lemma 8.19の証明</u> $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ より, $^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall n \geq N$, $|z_n - z| \leqq 1$, 従って $|z_n| \leqq |z_n - z| + |z| \leqq |z| + 1$.
さて, $n \in \mathbb{N}$ は $n \geq N$ を満たすとする. このとき

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{z_n^k}{k!}. \quad \cdots\cdots (8.9)$$

$f_n : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ を $k \leqq n$ のとき $f_n(k) := \dfrac{n!}{n^k(n-k)!} \dfrac{z_n^k}{k!}$, $k > n$ のとき $f_n(k) := 0$ と定めると

$$|f_n(k)| \leqq |z_n|^k / k! \leqq (|z| + 1)^k / k!, \quad \cdots\cdots (8.10)$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = z^k / k!$ であり, $\#$ を $^\forall k \in \mathbb{N}$, $\#(\{k\}) = 1$ なる $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 上の測度として, Prop 2.14-(2) を用いると

$$(1 + z_n/n)^n \underset{(8.9)}{=\!=} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n(k)\, d\#(k) \xrightarrow[n\to\infty]{(8.10),\, \mathrm{DCT}} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} (z^k/k!)\, d\#(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad \blacksquare$$

$C_\mu := \{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{a\}) = 0\}$, $C_\nu := \{a \in \mathbb{R} \mid \nu(\{a\}) = 0\}$ とおく. Thm 7.11 (5) $\Rightarrow$ (6) の証明の冒頭で示したように, $\mathbb{R} \setminus C_\mu$, $\mathbb{R} \setminus C_\nu$ は可算集合であり, すると $\mathbb{R} \setminus (C_\mu \cap C_\nu) = (\mathbb{R} \setminus C_\mu) \cup (\mathbb{R} \setminus C_\nu)$ も可算集合であるので, 特に $C_\mu \cap C_\nu$ は $\mathbb{R}$ において稠密, つまり

$$^\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow (a, b) \cap C_\mu \cap C_\nu \neq \phi \quad \cdots\cdots (8.7)$$

である (実際, (a,b) は非可算なので $(a,b) \not\subset \mathbb{R} \setminus (C_\mu \cap C_\nu)$).

さて, $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ を満たすものを任意に取る. (8.7) により, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n, b_n \in C_\mu \cap C_\nu$ を

$$a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a - \frac{1}{n+1}\right), \qquad b_n \in \left(b + \frac{1}{n+1}, b + \frac{1}{n}\right)$$

となるように取ることができ, するとこのとき $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

- $a_n < a_{n+1} < a < b < b_{n+1} < b_n$, 従って
  $$[a, b] \subset (a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n). \quad \cdots\cdots (8.8)$$
- $a_n, b_n \in C_\mu \cap C_\nu$ より $\mu(\{a_n, b_n\}) = \nu(\{a_n, b_n\}) = 0$, これと $\varphi_\mu = \varphi_\nu$, Thm 8.15 より $\mu((a_n, b_n)) = \nu((a_n, b_n))$.

また明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であるので, (8.8) と合わせて $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ であることが分かり, よって

$$\mu([a,b]) \underset{\text{Prop 1.6-(4)}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \mu((a_n, b_n)) = \lim_{n\to\infty} \nu((a_n, b_n)) \overset{\text{Prop 1.6-(4)}}{=\!=} \nu([a, b]).$$

これは乗法族 $\mathcal{I}_1 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\phi\}$ に対し $\mu|_{\mathcal{I}_1} = \nu|_{\mathcal{I}_1}$ であることを意味し, さらに Prop 1.9 により $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, また $\mu(\mathbb{R}) = 1 = \nu(\mathbb{R}) < \infty$ であるので, Thm 4.6 により $\mu = \nu$ が従う. $\blacksquare$

Thm 8.17 を Thm 7.12, Prop 7.8 と合わせて, 次の命題を得る.

<u>Prop 8.18</u> $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ とする.

(1) $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ ならば, $^\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_\mu(t)$.

(2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $^\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t) = \varphi(t)$ を満たすとし, さらに $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ は緊密 (Thm 7.12-(1)) と仮定する. このとき $^\exists \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\varphi_\mu = \varphi$. さらにこの μ に対し $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

(1) $t \in \mathbb{R}$ を任意に取ると, $\cos(t(\cdot)), \sin(t(\cdot)) \in C_b(\mathbb{R})$ より

$$\varphi_{\mu_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, \mu_n(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, \mu_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Def 7.2}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, \mu(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, \mu(dx) = \varphi_\mu(t).$$

(2) Thm 7.12 より $^\exists \{n_0(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加, $^\exists \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_{n_0(k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$ であり, すると (1) より $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{\mu_{n_0(k)}}(t) \underset{(1)}{=\!=} \varphi_\mu(t)$. さらに任意の狭義単調増加列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ に対し, 再度 Thm 7.12 より $^\exists \{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ 狭義単調増加, $^\exists \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu$ となるが, このとき再び (1) により $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\varphi_\mu(t) = \varphi(t) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_{\mu_{n(k(\ell))}}(t) \underset{(1)}{=\!=} \varphi_\nu(t)$$

となるので Thm 8.17 により $\mu = \nu$, 従って $\mu_{n(k(\ell))} \xrightarrow{\mathcal{L}} \nu = \mu$. これは Prop 7.8 の条件の成立を意味し, よって Prop 7.8 より $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

$\varphi_\mu = \varphi$ となる $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ の一意性は Thm 8.17 より従う. $\blacksquare$

8.2 中心極限定理 (Thm 7.4) の証明

最後に Prop 8.18-(2) を用いて中心極限定理 (Thm 7.4) を証明する.

<u>Lemma 8.19</u> $z \in \mathbb{C}$ と $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z.$$

(証明はページ上を参照.)

<u>Lemma 8.20</u> $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ は i.i.d. とし, $m := \mathbb{E}[X_1]$, $v := \mathrm{var}(X_1)$, また各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく. このとき $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(it \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)\right] = \exp\left(-\frac{t^2 v}{2}\right).$$

$f := \varphi_{X_1 - m}$ とおく. Thm 8.10 により, f', f'' が存在して $\mathbb{R}$ 上連続であり, また $f(0) = 1$, $f'(0) = i\mathbb{E}[X_1 - m] = 0$, $f''(0) = i^2 \mathbb{E}[(X_1 - m)^2] = -v$. $t = 0$ のときは主張は明らかなので, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. なので Prop 8.13 により $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(it \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)\right] &= \left(e^{-i(t/\sqrt{n})m}\right)^n \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left(e^{-i(t/\sqrt{n})m}\right)^n \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})^n = \left(e^{-i(t/\sqrt{n})m} \mathbb{E}\left[e^{i(t/\sqrt{n})X_1}\right]\right)^n \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i(t/\sqrt{n})(X_1 - m)}\right]^n = f(t/\sqrt{n})^n.
\end{aligned}$$

ところが Lemma 8.12 の1つ目の主張により, $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
f(t/\sqrt{n}) &= f(0) + f'(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} f''(0) \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2} v t^2 + t^2 \cdot \underbrace{o(t^2/n)/(t^2/n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\right)
\end{aligned}$$

であるので, Lemma 8.19 より

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(it \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)\right] = f(t/\sqrt{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Lemma 8.19}} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 v\right). \quad \blacksquare$$

<u>Thm 7.4の証明</u> (1) Lemma 8.20 と例 8.14 より $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{L}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)$ の特性関数 $\mathbb{E}\left[\exp\left(it \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)\right]$ は $n \to \infty$ のとき $N(0, v)$ の特性関数 $\exp\left(-\frac{t^2 v}{2}\right) = \varphi_{N(0,v)}(t)$ に収束する. また, $n, N \in \mathbb{N}$ を任意に取るとき Thm 5.3-(4) の証明中の議論から

1月21日ここまで

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R} \setminus [-N, N]\right] &= \mathbb{P}\left[|S_n - nm| > N\sqrt{n}\right] \\
&\leqq \frac{1}{N^2 n} \mathbb{E}\left[|S_n - nm|^2\right] = \frac{1}{N^2 n} \mathrm{var}(S_n) \underset{\text{Prop 4.14-(2)}}{=\!=} \frac{nv}{N^2 n} = \frac{v}{N^2}
\end{aligned}$$

となるので, "$\lim_{N\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \cdots$" を取ることで $\left\{\mathcal{L}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ は緊密であることが分かる. よって Prop 8.18-(2) が適用でき, 主張が従う.

(2) $\partial(-\infty, x] = \partial(-\infty, x) = \{x\}$ なので, (1) と Thm 7.11 より主張を得る. $\blacksquare$