No. 1

Date

10月1日ここから

§0. 序

▷サイコロを1つ投げる. 出目 $X\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

- X は「確率変数」, 各目の出る確率 $\frac{1}{6}$:
  $\forall k\in\{1,\cdots,6\},\quad \mathbb{P}[X=k]=\frac{1}{6}.$
- 他の「事象」の「確率」: 例えば
  $\mathbb{P}[X\text{は奇数}]=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}[X\text{は3の倍数}]=\frac{1}{3}.$

問題1 「確率変数」「確率」「事象」とは何か?
(数学的に厳密な定義が必要!)

▷サイコロを無限回投げる, n回目の出目 X_n

- 経験的に次が成り立つ(大数の法則):

(0.1) $\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\mathbb{E}[X]$ ← Xの「平均」(「期待値」)

$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{6}(1+\cdots+6)=7/2.$

問題2 (0.1)が成り立つ(はず)なのは何故か?
~~答. 我々の経験による~~

この講義の目標: 問題1, 2 に $\boxed{\text{数学的に厳密に}}$ 答えること!

「確率」を厳密に定式化するには?

▷Ω: 起こり得る全ての「場合」の集まり

▷各 $\Omega_0\subset\Omega$ に対し $\mathbb{P}[\Omega_0]\in[0,1]$ を対応させる(Ω_0の確率)

▷「確率変数」Xは, 各「場合」$\omega\in\Omega$ に「出目」$X(\omega)\in\mathbb{R}$ を対応させる …… XはΩ上の関数: $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

例 サイコロ1投: $\begin{cases}\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\\ \mathbb{P}[A]=\frac{\#A}{6},\ A\subset\Omega\ (\#A: A\text{の元の個数})\\ X:\Omega\to\mathbb{R},\ X(k)=k,\ {}^\forall k\in\Omega.\end{cases}$

▷「事象」Aは, 各「場合」$\omega\in\Omega$ごとに, 起きるか起きないか 2つに1つ.

$\Omega_A:=\{\omega\in\Omega\mid \text{「場合」}\omega\text{のとき}A\text{が起こる}\}$

とおくと, 「Aが起きる確率」=「Ω_Aの確率」$=\mathbb{P}[\Omega_A]$.

そこで「事象」AをΩ_Aと同一視する …「事象」とは, Ωの部分集合

例 サイコロ1投では「Xは奇数」$\leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\text{は奇数}\}=\{1,3,5\}$,
「Xは3の倍数」$\leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\text{は3の倍数}\}=\{3,6\}$

さらに $\mathbb{P}$ の満たすべき性質として:

- $\mathbb{P}[\phi]=0,\ \mathbb{P}[\Omega]=1$
- $\{A_n\}_{n=1}^N$: 事象の列, $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$
  $\Rightarrow \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{N}A_n]=\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}[A_n]$
  極限の取り扱いのためには $\boxed{N=\infty}$ が必要! (cf. (0.1))

つまり $\mathbb{P}$は測度(measure)であるべき!

まとめると: 「確率」の数学的定式化

(1)
- Ω: 集合(標本空間)
- 各 $A\subset\Omega$ に $\mathbb{P}[A]$ (事象Aの確率) $\in[0,1]$ を対応させる関数 $\mathbb{P}$ (測度)

(2) Ω上の関数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$
(確率変数:「ランダムな試行の結果」)

記号と基本的事実

▷$A:=B$ は「AをBで定義する」の意

▷$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$

▷集合Xに対し

- $2^X:=\{A\mid A\subset X\}$
- $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset X$ は「各$\lambda\in\Lambda$に対し$x_\lambda\in X$」の意
- X: 可算無限 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 全単射 $\varphi:\mathbb{N}\to X$ が存在 (例: $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$)
- X: 可算 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Xは有限もしくは可算無限
- X: 非可算 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Xは可算でない (例: $\mathbb{R},\mathbb{C}$)

- $n\in\mathbb{N}$で $X_1,\cdots,X_n$は可算集合 $\Rightarrow X_1\times\cdots\times X_n$は可算
- 各$n\in\mathbb{N}$に対しA_nは可算集合 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n$は可算

§1 測度論からの基本事項

Def 1.1 (σ-加法族)

- Xを集合, $\mathcal{M}\subset 2^X$とする.
  $\mathcal{M}$: Xの(における) σ-加法族(完全加法族, σ-algebra)
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (σ1) $\phi\in\mathcal{M}$
  (σ2) $A\in\mathcal{M}\Rightarrow A^c:=X\setminus A\in\mathcal{M}$
  (σ3) $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M}\Rightarrow\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{M}$.
- このとき $(X,\mathcal{M})$ は可測空間であるという.
  各 $A\in\mathcal{M}$ は Xの可測集合と呼ばれる.

Prop 1.2 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ に対し:

(1) $X \in \mathcal{M}$.

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(3) $n \in \mathbb{N}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n,\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{M}$.

(4) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$.

(∵ ノート Prop 1.2.)

Def 1.3 (拡大実数系 $[-\infty, \infty]$)

(1) $\mathbb{R}$ に $\pm\infty \notin \mathbb{R}$ なる2元 $\infty, -\infty$ を付け加えた集合

$$[-\infty, \infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

を拡大実数系という.

$\forall a \in$ [redacted] $[-\infty,\infty]$ $-\infty \leqq a \leqq \infty$

と定めることで $\mathbb{R}$ の順序 $\leqq$ を $[-\infty, \infty]$ に拡張する. (全順序になる)

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty, \infty]$ に対し $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ [redacted]

$\overset{def}{\iff} \forall b \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqq N,\ a_n \gtrless b$.

(3) [redacted] $[-\infty, \infty]$ における和と積は自然な方法で定義.

ただし ● $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$ は定義されない.

● $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 =: 0$ と定義する!

このとき ● 積の交換・結合則

● $[0, \infty]$ における和の交換・結合則, 分配則

が成り立つ. よって $[0, \infty]$ では和と積について普通の計算ができる.

(∵ ノート Prop 0.7) 10月8日ここから 10月1日ここまで

Prop 1.4 ● $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty] \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \in [0, \infty]$ $\left(=: \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$

(∵ ノート Def 0.9)

Def 1.5 (測度) $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする.

$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が $\mathcal{M}$ 上の(あるいは $(X, \mathcal{M})$ 上の)測度 (measure)

$\overset{def}{\iff}$ ● $\mu(\phi) = 0$

● $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \phi\ (\forall i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(可算加法的)

このとき3つ組 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間という.

また $\mu(X) = 1$ のとき μ を確率測度, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を確率空間という.

Prop 1.6 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする.

(1) $n \in \mathbb{N}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \phi\ (\forall i \neq j)$

$\Rightarrow \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$

(2) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqq \mu(B)$.

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

(4) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $\mu(A_1) < \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

(∵ ノート Prop 1.4)

Prop 1.7 X を集合とする.

(1) Λ を集合, $\Lambda \neq \phi$ とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathcal{M}_\lambda$ は X の σ-加法族とする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ は X の σ-加法族.

(2) $\mathcal{A} \subset 2^X$ とし,

$$\sigma_X(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{は} X \text{の} \sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M} \quad (1.3)$$

とおく. このとき $\sigma_X(\mathcal{A})$ は, X の σ-加法族で $\mathcal{A}$ を含むもののうち最小のものである. ($\sigma_X(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ によって生成される X の σ-加法族という.)

($\sigma_X(\mathcal{A})$ を単に $\sigma(\mathcal{A})$ とも書く.)

(∵) (ノート Prop 1.7)

(1) $\mathcal{M} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ が Def 1.1 の $(\sigma 1), (\sigma 2), (\sigma 3)$ を満たすことを示す.

$(\sigma 1)$: $\forall \lambda \in \Lambda$, $\phi \in \mathcal{M}_\lambda$ (∵ $\mathcal{M}_\lambda$ の $(\sigma 1)$). ∴ $\phi \in \mathcal{M}$.

$(\sigma 2)$: $A \in \mathcal{M}$ とすると $\forall \lambda \in \Lambda$, $A \in \mathcal{M}_\lambda$. よって $(\sigma 2)$ より $A^c \in \mathcal{M}_\lambda$. ∴ $A^c \in \mathcal{M}$.

$(\sigma 3)$: $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ とすると $\forall \lambda \in \Lambda$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_\lambda$ なので $(\sigma 3)$ より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_\lambda$. ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(2) 2^X は $\mathcal{A} \subset 2^X$ なる X の σ-加法族なので, (1.3) の添字集合は空でない. よって (1.3) 右辺の "$\bigcap$" は定まり, (1) より $\sigma_X(\mathcal{A})$ は X の σ-加法族. (1.3) より明らかに, $\mathcal{A} \subset \sigma_X(\mathcal{A})$ であり, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ なる X の σ-加法族 $\mathcal{M}$ に対し $\sigma_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$. ■

例 1.8 ($\mathbb{R}^d$ の Borel σ-加法族と Lebesgue 測度) $d \in \mathbb{N}$ とする.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma_{\mathbb{R}^d}(\{U \subset \mathbb{R}^d \mid U \text{は} \mathbb{R}^d \text{の開集合}\})$$

を $\mathbb{R}^d$ の Borel σ-加法族, 各 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合という.

($U \subset \mathbb{R}^d$ 開 $\overset{def}{\iff} \forall x \in U, \exists \varepsilon \in (0, \infty), B_d(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| < \varepsilon\} \subset U$.)

次が知られている (ノート Corollary 2.28):

$\exists 1\ m_d$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の測度, $\forall [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ d次元閉区間,

$m_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$.

m_d を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度という. ($d=1$: 長さ $d=2$: 面積 $d=3$: 体積)