Prop 1.9 $d\in\mathbb{N}$とし,

$$\mathcal{I}_d := \{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d] \mid {}^\forall k\in\{1,\dots,d\}\text{に対し}a_k,b_k\in\mathbb{R},\ a_k\le b_k\}\cup\{\emptyset\},$$

$$\mathcal{I}_d^{\mathbb{Q}} := \{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d] \mid {}^\forall k\in\{1,\dots,d\}\text{に対し}a_k,b_k\in\mathbb{Q},\ a_k\le b_k\}\cup\{\emptyset\}$$

可算!

とおく. このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)=\sigma(\mathcal{I}_d)=\sigma(\mathcal{I}_d^{\mathbb{Q}})$.
(∵ I-D Prop 1.9)

可測関数と単関数

$(X,\mathcal{M})$を可測空間とする.

Def. 1.10 (可測関数) 「期待値(平均)が定義できる」関数!

$f:X\to[-\infty,\infty]$が$\mathcal{M}$-可測

$\overset{def}{\iff}$ ${}^\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \underbrace{f^{-1}(A)}_{\{x\in X\mid f(x)\in A\}}\in\mathcal{M}$, かつ $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty)\in\mathcal{M}$.

Prop 1.11 $f:X\to[-\infty,\infty]$が$\mathcal{M}$-可測

$\iff {}^\forall a\in\mathbb{Q},\ f^{-1}((a,\infty])\in\mathcal{M} \iff {}^\forall a\in\mathbb{R},\ f^{-1}((a,\infty])\in\mathcal{M}$.

($(a,\infty] := \{x\in[-\infty,\infty] \mid x>a\}$)

(∵ I-D Prop 1.14)

Prop 1.12 $f,g:X\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{M}$-可測とする.

(1) ${}^\forall x\in X$に対し$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$が定義できる($\infty+(-\infty)$, $-\infty+\infty$の形にならない)ならば$f+g:X\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{M}$-可測.

(2) $(fg)(x):=f(x)g(x)$で定義される$fg:X\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{M}$-可測.

∵(1) $a\in\mathbb{R}$に対し

$$(f+g)^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s>a}} f^{-1}((r,\infty])\cap g^{-1}((s,\infty])\in\mathcal{M}$$

可算!

なので Prop 1.11 より$f+g$は$\mathcal{M}$-可測.

(2) (1)と本質的に同様だが, $\pm$の符号の問題や「0との積」$=0$, に注意する必要がある. (I-D Prop 1.15-(2)) ■

X上の$[-\infty,\infty]$-値関数の列$\{f_n\}_{n=1}^\infty$に対し,
$\sup_{n\ge1}f_n$, $\inf_{n\ge1}f_n$, $\limsup_{n\to\infty}f_n$, $\liminf_{n\to\infty}f_n$
をX上の関数として次で定義:

$$\left(\sup_{n\ge1}f_n\right)(x) := \sup_{n\ge1}\{f_n(x)\},\quad \left(\limsup_{n\to\infty}f_n\right)(x) := \limsup_{n\to\infty}\{f_n(x)\},$$

$$\left(\inf_{n\ge1}f_n\right)(x) := \inf_{n\ge1}\{f_n(x)\},\quad \left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)(x) := \liminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\}.$$

注意1.13 (1) $\pm\infty$を含めたおかげで, 空でない$A\subset[-\infty,\infty]$には($[-\infty,\infty]$における)上限$\sup A$, 下限$\inf A$が常に存在. (I-D Prop 0.2)

(2) $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset[-\infty,\infty]$に対し

$$\limsup_{n\to\infty}a_n := \inf_{n\ge1}\left(\sup_{k\ge n}a_k\right),\quad \liminf_{n\to\infty}a_n := \sup_{n\ge1}\left(\inf_{k\ge n}a_k\right)$$

をその上極限, 下極限という. (I-D Def. 0.4)

$\lim_{n\to\infty}a_n$と違って, いつでも存在するので便利!

次が成り立つ:

- $\liminf_{n\to\infty}a_n \le \limsup_{n\to\infty}a_n$ (∵ I-D (0.9)の下)
- 極限$\lim_{n\to\infty}a_n$が存在(つまり${}^\exists a\in[-\infty,\infty]$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$)
  $\iff \limsup_{n\to\infty}a_n = \liminf_{n\to\infty}a_n$ (←また, このとき $=\lim_{n\to\infty}a_n$).

(∵ I-D Prop 0.5)

Prop 1.14 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:X\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{M}$-可測とする.
このとき$\sup_{n\ge1}f_n$, $\inf_{n\ge1}f_n$, $\limsup_{n\to\infty}f_n$, $\liminf_{n\to\infty}f_n$も$\mathcal{M}$-可測.

∵ $a\in\mathbb{R}$に対し$\left(\sup_{n\ge1}f_n\right)^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n=1}^\infty f_n^{-1}((a,\infty])\in\mathcal{M}$
なので Prop 1.11 より$\sup_{n\ge1}f_n$は$\mathcal{M}$-可測. $\inf_{n\ge1}f_n$も同様,
$\limsup_{n\to\infty}f_n$, $\liminf_{n\to\infty}f_n$は$\sup_{n\ge1}f_n$, $\inf_{n\ge1}f_n$に対する結果を2回ずつ使えばよい(詳しくはI-D Prop 1.16). ■

Lemma 1.15 $d\in\mathbb{N}$とし$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$は連続とする.
このときfは$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測である.

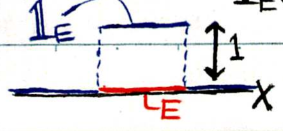
∵ $\mathcal{A} := \{A\subset\mathbb{R} \mid f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$とおくと

- $\mathcal{A}$は$\mathbb{R}$のσ-加法族(易しい)
- $\{\mathbb{R}\text{の開集合}\}\subset\mathcal{A}$である. 実際$U\underset{開}{\subset}\mathbb{R}$とすると$f$の連続性から$f^{-1}(U)\underset{開}{\subset}\mathbb{R}^d$, 従って$f^{-1}(U)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$となるので$U\in\mathcal{A}$.

以上より, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$の最小性から$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{A}$, つまり$f$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測.
(I-D Lemma 1.17も参照のこと.) ■

$E\subset X$に対し, $\mathbb{1}_E:X\to\mathbb{R}$ (Eの指示関数 indicator function) を次で定義:

$$\mathbb{1}_E(x) := \begin{cases}1 & (x\in E)\\ 0 & (x\notin E)\end{cases}$$



● $\mathbb{1}_E$: $\mathcal{M}$-可測 $\iff$ $E\in\mathcal{M}$.

(☺)($\Longrightarrow$) $\{1\}\underset{閉}{\subset}\mathbb{R}$ より $\{1\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ なので $E=\mathbb{1}_E^{-1}(\{1\})\in\mathcal{M}$.
($\Longleftarrow$) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し $\mathbb{1}_E^{-1}(A)\in\{\emptyset,E,E^c,X\}\subset\mathcal{M}$.

10月15日ここから

10月8日ここまで

Def1.16 (単関数)

$s:X\to\mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-単関数 (←$\mathbb{R}$-値であることに注意!)

$\overset{def}{\iff}$ s は $\mathcal{M}$-可測で [redacted] その像 $\underset{\{s(x)\mid x\in X\}}{\underline{s(X)}}$ は有限集合

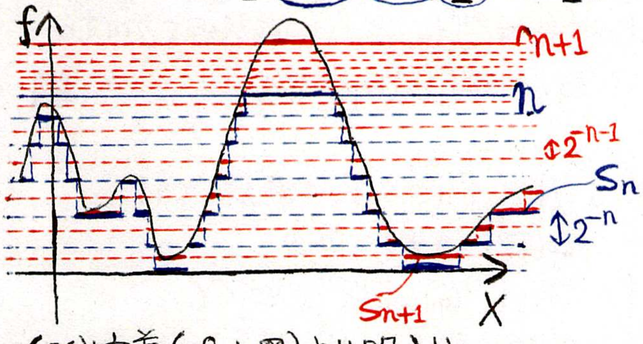
● s : $\mathcal{M}$-単関数

$\iff$ $\exists n\in\mathbb{N}, \{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}, \{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{M}, s=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}$.

(☺)($\Longrightarrow$) $s=\sum_{a\in s(X)} a\cdot\mathbb{1}_{s^{-1}(a)}$.
($\Longleftarrow$) 明らかに $s(X)$ は有限集合, また Prop1.12-(1)より $\mathcal{M}$-可測!

Prop1.17 $f:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. このとき
$\exists\{s_n\}_{n=1}^\infty$: $\mathcal{M}$-単関数の列, $\forall x\in X$,
(S1) [redacted] $0\le s_n(x)\le s_{n+1}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
(S2) $\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$.

☺ $s_n:=\sum_{i=1}^{n\cdot 2^n}\frac{i-1}{2^n}\mathbb{1}_{\{\frac{i-1}{2^n}\le f<\frac{i}{2^n}\}}+n\mathbb{1}_{\{f\ge n\}}$



(S1): 定義(cf. 上図)より明らか.
(S2): $f(x)<\infty$ なら $\forall n>f(x)$, $f(x)-2^{-n}<s_n(x)\le f(x)$.
$f(x)=\infty$ なら $\forall n\in\mathbb{N}$, $s_n(x)=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty=f(x)$. ■

積分と収束定理 (厳密な定義は (ノート) §1.3を参照)

Thm1.18 (積分の性質I: 非負関数) $(X,\mathcal{M},\mu)$を測度空間とする.

(1)(非負単関数の積分) $n\in\mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i=1}^n\subset[0,\infty)$, $\{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{M}$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_X\left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}\right)d\mu=\sum_{i=1}^n a_i\cdot\mu(A_i)}$$

注 $0\cdot\infty:=0$!

(2)(単調性) $f,g:X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, X上 $f\le g$

$\Longrightarrow$ $(0\le)\int_X f\,d\mu\le\int_X g\,d\mu\ (\le\infty)$.

(3)(線型性) $f,g:X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\alpha,\beta\in[0,\infty]$

$\Longrightarrow$ $\int_X(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu$.

(☺ (ノート) Def1.20〜Prop1.25) 注 $\infty\cdot 0:=0\cdot\infty:=0$!

Thm1.19 (単調収束定理, Monotone Convergence Thm, MCT)

各$n\in\mathbb{N}$に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とし,
$\forall x\in X$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$
と仮定する. このとき
$(\lim_{n\to\infty}f_n)(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ ← 注 単調非減少列なので極限は存在し, $\sup_{n\ge1}f_n(x)$ に等しい.
で定義される $\lim_{n\to\infty}f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測で,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)d\mu}$$

(☺ (ノート) Thm1.24)

Prop1.20 各$n\in\mathbb{N}$に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とするとき,

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_X f_n\,d\mu.$$

☺ 各$x\in X$に対し $(\sum_{i=1}^n f_i)(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)$ はnについて非減少で, $n\to\infty$のとき $\sum_{m=1}^\infty f_m(x)=:(\sum_{m=1}^\infty f_m)(x)$ に収束する. (また Prop1.12より $\sum_{i=1}^n f_i$ は $\mathcal{M}$-可測.) 従って

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right)d\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)d\mu\underset{MCT}{=}\lim_{n\to\infty}\int_X\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)d\mu$$
$$\underset{線型性}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_X f_i\,d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_X f_n\,d\mu.$$ ■

Prop1.21 (Fatouの補題)

各$n\in\mathbb{N}$に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とするとき,

$$\int_X\left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

☺ $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n$とする. X上 $\inf_{k\ge n}f_k\le f_m$ で, Prop1.14 より $\inf_{k\ge n}f_k\,(\ge0)$ は $\mathcal{M}$-可測 なので Thm1.18-(2) より $\int_X(\inf_{k\ge n}f_k)d\mu\le\int_X f_m\,d\mu$. $m(\ge n)$についてinfをとれば $\int_X(\inf_{k\ge n}f_k)d\mu\le\inf_{k\ge n}\int_X f_k\,d\mu$. ……(☆)
ここで $n\to\infty$とすれば, $\inf_{k\ge n}(\cdots)_k$ はnについて非減少で, 従って$n\to\infty$のとき $\liminf_{n\to\infty}(\cdots)_n$ に収束するので, 左辺は MCTから $\int_X(\liminf_{n\to\infty}f_n)d\mu$ に, 右辺は $\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$ に収束し, よって不等式(☆)から主張が従う. ■