$a\in[-\infty,\infty]$ に対し

$$a^+ := \max\{a,0\},\quad a^- := -\min\{a,0\}$$

と定める.(このとき容易に $|a| = a^+ + a^-$, $a = a^+ - a^-$.)
同様に関数 $f: X\to[-\infty,\infty]$ に対し

$$f^+(x) := f(x)^+ = \max\{f(x),0\},\quad f^-(x) := f(x)^- = -\min\{f(x),0\}$$

により $f^+, f^-: X\to[$[redacted]$,\infty]$ を定める. このとき

$$f = f^+ - f^-,\quad |f| = f^+ + f^-$$ である.

● f が $\mathcal{M}$-可測なら $f^+, f^-, |f|$ も $\mathcal{M}$-可測.
(☺ f^+, f^- は Prop1.11から容易.(cf. Prop1.14の証明)
$|f|$ は $|f| = f^+ + f^-$ と Prop1.12-(1) より分かる.)

Def 1.22(積分の定義II: $[-\infty,\infty]$-値関数)
(1) $f: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測 に対し:
▷ $\exists\int_X f\,d\mu \overset{def}{\iff} \min\left\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\right\} < \infty$.
▷ $\exists\int_X f\,d\mu$ のとき $\boxed{\int_X f\,d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu}$
▷ f: μ-可積分 $\overset{def}{\iff} \int_X |f|\,d\mu < \infty$.
(2) $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)$
$:= \{f: X\to\mathbb{R} \mid f$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分$\}$.

注意1.23 (1) f が $[0,\infty]$-値のときは, Def1.22-(1)の $\int_X f\,d\mu$ の定義はそれ以前のものに一致. 特に $\exists\int_X f\,d\mu \geq 0$.
(☺ $f^+ = f$, $f^- = 0$ より, $\overset{前}{\int_X} f^+ d\mu - \overset{前}{\int_X} f^- d\mu = \overset{前}{\int_X} f\,d\mu$.)
(2) f: μ-可積分 [redacted]$\iff$ $\exists\int_X f\,d\mu \in\mathbb{R}$.
☺ ($\Leftarrow$) $\exists\int_X f\,d\mu$ より $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ のうち少なくとも1つは $<\infty$. ここで他が ∞ と仮定すると $\int_X f\,d\mu$ は ∞ か $-\infty$ となり $\int_X f\,d\mu\in\mathbb{R}$ に反する. よって $\int_X f^+ d\mu<\infty$ かつ $\int_X f^- d\mu<\infty$ なので $\int_X |f|\,d\mu = \int_X (f^+ + f^-)\,d\mu \underset{線型性}{=} \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty$.
($\Rightarrow$) $f^\pm \leq |f|$ なので $\int_X f^\pm d\mu \underset{単調性}{\leq} \int_X |f|\,d\mu < \infty$.
よって $\exists\int_X f\,d\mu$ であり, $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in\mathbb{R}$. ■

記号 $\int_X f\,d\mu$ を,次のように変数を明示する形でもよく書く:

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) := \int_X f(x)\,\mu(dx) := \int_X f\,d\mu.$$

同じ意味だが,確率論では
の方をよく使う.

Thm1.24(積分の性質II: $\overset{[-\infty,\infty]}{\overline{\mathbb{R}}}$-値関数)
(1)(単調性) $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, X上 $f\leq g$,
$\exists\int_X f\,d\mu, \exists\int_X g\,d\mu \Rightarrow \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.
特に, $f: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\exists\int_X f\,d\mu$
$\Rightarrow \left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$.
(2) $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (線型性)
$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu + \beta\int_X g\,d\mu$.
(☺ ノート Prop1.31)

Thm1.25(Lebesgueの収束定理 [ルベーグ], Dominated Convergence Thm DCT)
各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. 次を仮定:
(L1) $\forall x\in X$, 極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $[-\infty,\infty]$ において存在
(L2) $\exists g: X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\int_X g\,d\mu<\infty$ (nに依らない!),
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. ($\underset{単調性}{\Longrightarrow}$ f_n: μ-可積分)
このとき $f: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分で

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu}\quad (注\ f = \lim_{n\to\infty} f_n)$$

(☺ ノート Thm1.33)

10月29日 ここから — 10月22日 休講! — 10月15日 ここまで

測度0の集合と積分

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

Def.1.26(ほとんどすべての, 至るところ, Almost everywhere, a.e.)
$A\in\mathcal{M}$ とし, 各 $x\in A$ に対し $S(x)$ を x に関する数学的主張とする. このとき,
S が μ に関して[redacted] A上ほとんど至るところ成り立つ
($S(x)$ が μ に関してほとんどすべての $x\in A$ に対し成り立つ,
S μ-a.e. on A, μ-a.e. $x\in A$ に対し $S(x)$)
$\overset{def}{\iff}$ $\exists N\in\mathcal{M}$, $\mu(N)=0$, $\forall x\in A\setminus N$ に対し $S(x)$ が成立.
($A = X$ のときは「A上」, "on A" を省く.)

Prop1.27 $f: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする.
(1) $N\in\mathcal{M}$, $\mu(N)=0 \Rightarrow f\cdot 1_N$ は μ-可積分で $\int_X f\cdot 1_N\,d\mu = 0$.
(2) f: μ-可積分 $\Rightarrow |f|<\infty$ μ-a.e.
(☺ ノート Prop1.30)

Prop1.28 $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測で $f=g$ μ-a.e. とする.
このとき $\exists\int_X f\,d\mu \iff \exists\int_X g\,d\mu$, また "$\exists\int_X$" のとき $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.
(☺ ノート Prop1.32)

§2 確率変数とその分布，期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする（つまり測度空間，$\mathbb{P}[\Omega]=1$）

Def 2.1 (1) Ω を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の標本空間という．
(2) 各 $A\in\mathcal{F}$ を事象といい，$\mathbb{P}[A]$ をその確率という．
(3)「ほとんど確実に」，"almost surely"，"a.s." は "$\mathbb{P}$-a.e." を意味する．
（$\mathbb{P}$ を明示したいときは，"$\mathbb{P}$-a.s."，「$\mathbb{P}$ に関してほとんど…」と書く．）

Def. 2.2（確率変数，Random Variable，r.v.）
(1) $\mathcal{F}$-可測関数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ のことを実確率変数（real random variable, real r.v.）という．
(2) $d\in\mathbb{N}$ とする．$X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ について：
X：d次元確率変数（d-dim. r.v.）
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，$\{X\in A\}:=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$．
（普通の写像の記号では $X^{-1}(A)$ と書く）

● 実確率変数 $\Leftrightarrow$ 1次元確率変数（∵ Def 1.10）

Prop 2.3 $d\in\mathbb{N}$ とし，各 $k\in\{1,\cdots,d\}$ に対し $X_k:\Omega\to\mathbb{R}$ とする．$X=(X_1,\cdots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$ を $X(\omega):=(X_1(\omega),\cdots,X_d(\omega))$ で定める．このとき：
X：d-dim. r.v. $\Longleftrightarrow$ $\forall k\in\{1,\cdots,d\}$，$X_k$：real r.v.

∵ ($\Longrightarrow$) $a\in\mathbb{R}$ とすると，$\mathbb{R}\times\cdots\times\underset{k}{(a,\infty)}\times\cdots\times\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合，従って $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の元であるので，X が d-dim r.v. であることから $\mathcal{F}\ni\{X\in\mathbb{R}\times\cdots\times\underset{k}{(a,\infty)}\times\cdots\times\mathbb{R}\}=\{X_k\in(a,\infty)\}$．
つまり $\forall a\in\mathbb{R}$，$X_k^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{F}$ なので Prop 1.11 より X_k：$\mathcal{F}$-可測．
($\Longleftarrow$) $\mathcal{A}:=\{A\subset\mathbb{R}^d \mid X^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$ とおく．

● $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^d$ の σ-加法族
（∵ (σ1) $X^{-1}(\phi)=\phi\in\mathcal{F}$ より $\phi\in\mathcal{A}$．
(σ2) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow X^{-1}(A^c)=(X^{-1}(A))^c\in\mathcal{F}$．$\therefore A^c\in\mathcal{A}$．
(σ3) $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{A}\Rightarrow X^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\bigcup_{n=1}^\infty X^{-1}(A_n)\in\mathcal{F}$．
$\therefore \bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{A}$．）

● $\mathcal{I}_d\subset\mathcal{A}$（$\mathcal{I}_d$ の定義は Prop 1.9 参照）．
（∵ $X^{-1}([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d])=\bigcap_{k=1}^d X_k^{-1}([a_k,b_k])\in\mathcal{F}$
が，$[a_k,b_k]\in\mathcal{I}_1\underset{\text{Prop 1.9}}{\subset}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と X_k：real r.v. から分かる．）
よって $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\underset{\text{Prop 1.9}}{=}\sigma(\mathcal{I}_d)\subset\mathcal{A}$，ゆえに $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，$X^{-1}(A)\in\mathcal{F}$．■

Prop 2.4 $d\in\mathbb{N}$ とし，X を d-dim r.v.，$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする．このとき $f(X):=f\circ X:\Omega\to\mathbb{R}$ は real r.v.

∵ $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると $(f(X))^{-1}(A)=(f\circ X)^{-1}(A)=X^{-1}(f^{-1}(A))$ であり，f：$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測より，$f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，よって $X^{-1}(f^{-1}(A))\in\mathcal{F}$．
$\therefore f(X)^{-1}(A)\in\mathcal{F}$ となり，$f(X)$ は $\mathcal{F}$-可測．■

● X：d-dim r.v.，$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 連続 $\Longrightarrow$ $f(X)$ real r.v.
（∵ Lemma 1.15 より f は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測なので Prop 2.4 が使える．）

Def 2.5（期待値（平均））X を real r.v.（あるいはより一般に $\mathcal{F}$-可測な $X:\Omega\to[-\infty,\infty]$）とする．
▷ $\exists\mathbb{E}[X]$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$．
▷ $\exists\mathbb{E}[X]$ のとき $\boxed{\mathbb{E}[X]:=\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)}$．
（X の期待値（平均））
▷ X：可積分 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ X：$\mathbb{P}$-可積分 $\Longleftrightarrow$ $\exists\mathbb{E}[X]\in\mathbb{R}$．

Def 2.6 $p\in(0,\infty)$ に対し
$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}):=\mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{P}):=\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$
$:=\{X \mid X:\text{real r.v.},\ \mathbb{E}[|X|^p]<\infty\}$．
（注 $|\cdot|^p:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は連続より，$|X|^p$：real r.v.）

● $X,Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$，$\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha X,\ X+Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$．
（∵ Prop 1.12 より αX，$X+Y$ は real r.v. であり，
$\mathbb{E}[|\alpha X|^p]=\mathbb{E}[|\alpha|^p|X|^p]\underset{\text{線型性}}{=}|\alpha|^p\mathbb{E}[|X|^p]<\infty$．また
$|X+Y|^p\leqq(|X|+|Y|)^p\leqq(2\cdot\max\{|X|,|Y|\})^p\leqq 2^p(|X|^p+|Y|^p)$
なので $\mathbb{E}[|X+Y|^p]\underset{\text{単調性}}{\leqq}\mathbb{E}[2^p(|X|^p+|Y|^p)]\underset{\text{線型性}}{=}2^p(\mathbb{E}[|X|^p]+\mathbb{E}[|Y|^p])$
$<\infty$．）

Prop 2.7 (1) X を real r.v. とし，X は a.s. に有界，すなわち $\exists M\in[0,\infty)$，$|X|\leqq M$ a.s. と仮定する．このとき $\forall p\in(0,\infty)$，$X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$．
(2) $X,Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Longrightarrow XY\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$，$|\mathbb{E}[XY]|^2\leqq\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$．
（Cauchy-Schwarz 不等式）
特に $X\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Longrightarrow X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$，$\mathbb{E}[X]^2\leqq\mathbb{E}[X^2]$．

∵ (1) $\mathbb{R}\ni x\mapsto\min\{x,M^p\}\in\mathbb{R}$
は連続関数なので $\min\{|X|^p,M^p\}$ は real r.v. で，仮定より
$|X|^p=\min\{|X|^p,M^p\}$ a.s. なので Prop 1.28 より
$\mathbb{E}[|X|^p]=\mathbb{E}[\min\{|X|^p,M^p\}]\underset{\text{単調性}}{\leqq}\mathbb{E}[M^p]=M^p<\infty$．
（$\mathbb{P}[\Omega]=1$）
$\therefore X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$．