$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "f(X)"'] & (\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \arrow[d, "f"] \quad \mathbb{P}_X := \mathbb{P}\circ X^{-1} \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

積分①　積分②　Thm 2.10-(2)

(2) $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ とする. $|XY| \leqq \frac{1}{2}(|X|^2+|Y|^2)$ なので

$$\mathbb{E}[|XY|] \underset{\text{単調性}}{\leqq} \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2)\right] \underset{\text{線型性}}{=} \tfrac{1}{2}(\mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[Y^2]) < \infty.$$

よって $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ であり, また $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]=0$ ならこの不等式より
$0 \leqq \mathbb{E}[|XY|] \leqq \frac{1}{2}(0+0)=0$, $|\mathbb{E}[XY]| \leqq \mathbb{E}[|XY|]=0=\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$.
そこで $\mathbb{E}[X^2]>0$ または $\mathbb{E}[Y^2]>0$ と仮定してよい. $\mathbb{E}[X^2]>0$ と仮定し $t := -\frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[X^2]}$ とおくと

$$0 \leqq \mathbb{E}[(tX+Y)^2] = t^2\mathbb{E}[X^2]+2t\mathbb{E}[XY]+\mathbb{E}[Y^2] = -\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[X^2]}+\mathbb{E}[Y^2].$$

$\therefore \mathbb{E}[XY]^2 \leqq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$. $\mathbb{E}[Y^2]>0$ のときも同様. ■

Def 2.8 (分散・共分散)

(1) Real r.v. X に対しその分散 $var(X)$ を次で定める:

$$var(X) := \begin{cases} \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 & (X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})) \\ \infty & (X \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{P})) \end{cases}$$

(また $\sigma(X) := \sqrt{var(X)}$ を X の標準偏差という.)

(2) $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ に対しその共分散 $cov(X,Y)$ を次で定める:

$$cov(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

11月5日 ここから　　10月29日 ここまで

Def 2.9 (確率変数の分布(法則)) $d \in \mathbb{N}$ とし X は d-dim. r.v. とする. 次で定まる $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_X$ (cf. 下の Thm 2.10):

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}\circ X^{-1}(A) := \mathbb{P}[X^{-1}(A)] = \mathbb{P}[X \in A], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

を X の分布 (distribution) もしくは法則 (law) という.

記号 ● X の分布を $\mathcal{L}(X)$ とも書き表す
(X の定義されている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を表に出したくないとき用いる)

● $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 μ に対し

$$X \sim \mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L}(X) = \mu.$$

$\mathbb{P}_X$ が測度であること, およびその重要な性質:

Thm 2.10 (像測度定理; cf. (I-1) Thm 1.46) X を d-dim. r.v. とする.

(1) $\mathbb{P}_X$ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度である.

(2) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする. このとき

● $\exists\mathbb{E}[f(X)] \Leftrightarrow \exists\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$,

また "$\exists$" のとき $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$.

☆要約すると: (↑の図も参照のこと)

Def 2.9 …… X で決まる事象の確率についての情報を(全て)寄せ集めたものを「X の分布」$\mathbb{P}_X$ と定義.

Thm 2.10 …… 「X の関数」$f(X)$ の期待値は $\mathbb{P}_X$ による積分として計算できる.

系 2.10 X を real r.v. とする.

(1) $\exists\mathbb{E}[X] \Leftrightarrow \exists\int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx)$ であり, "$\exists$" のとき

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx).$$

(2) ● $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathbb{P}_X(dx) \ (\in [0,\infty])$.

∵ Thm 2.10-(2) を, (1) は $f(x)=x$, (2) は $f(x)=x^2$ として用いればよい. ■

Thm 2.10 の証明

(1) $X^{-1}(\phi)=\phi$ なので $\mathbb{P}_X(\phi)=\mathbb{P}[X^{-1}(\phi)]=\mathbb{P}[\phi]=0$.
$X^{-1}(\mathbb{R}^d)=\Omega$ なので $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}^d)=\mathbb{P}[X^{-1}(\mathbb{R}^d)]=\mathbb{P}[\Omega]=1$.
$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は $\forall j \neq k$, $A_j \cap A_k = \phi$ をみたすとすると,
$\{X^{-1}(A_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $\forall j \neq k$, $X^{-1}(A_j) \cap X^{-1}(A_k) = X^{-1}(A_j \cap A_k) = X^{-1}(\phi) = \phi$
であるので

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mathbb{P}\left[X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^\infty X^{-1}(A_n)\right] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[X^{-1}(A_n)] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}_X(A_n).$$

以上より $\mathbb{P}_X$ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度である.

(2) まず, Prop 2.4 より $f(X)$ は real r.v. であったことを思い出そう.

第1段 $\boxed{f = \mathbb{1}_A}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ のとき:
$f(X) = \mathbb{1}_A(X) = \mathbb{1}_{\{X \in A\}}$ であるので

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\in A\}}] = \mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{P}_X(dx).$$

第2段 f が非負 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-単関数のとき:
$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $a_k \in [0,\infty)$, $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, と書けて

$$\mathbb{E}[f(X)] \underset{\text{線型}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}(X)] \underset{\text{第1段}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{P}_X(A_k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx).$$

第3段 $f: \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測 のとき:
f に対し Prop 1.17 のように $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-単関数の列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ をとると,
第2段より $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[s_n(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} s_n(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$. そこで
両辺に単調収束定理を用いると

$$(\text{左辺}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx) \xleftarrow{n\to\infty} (\text{右辺}).$$

$\boxed{\text{オ4段}}$ $f:\mathbb{R}^d\to$ [redacted] $\overline{\mathbb{R}}$ $([-\infty,\infty])$ のとき:
$(f(X))^{\pm}=f^{\pm}(X)$ なのでオ3段より $\mathbb{E}[(f(X))^{\pm}]=\int_{\mathbb{R}^d}f^{\pm}(x)\mathbb{P}_X(dx)$.
これより $\min\{\mathbb{E}[(f(X))^+],\mathbb{E}[(f(X))^-]\}=\min\{\int_{\mathbb{R}^d}f^+(x)\mathbb{P}_X(dx),\int_{\mathbb{R}^d}f^-(x)\mathbb{P}_X(dx)\}$
であり，これが$<\infty$のとき [redacted] $\pm$の差をとれば $\mathbb{E}[f(X)]=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{P}_X(dx)$. ■

次の定理は次§で例を扱うための準備である：

Thm2.11 $(X,\mathcal{M},\mu)$を測度空間とする.
$f:X\to[0,\infty]$ は$\mathcal{M}$-可測とし，$\nu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ を
$$\nu(A):=\int_X f\mathbb{1}_A\,d\mu,\quad A\in\mathcal{M}\quad で定める.$$
(1) νは$(X,\mathcal{M})$上の測度である.
(2) $g:X\to[-\infty,\infty]$ は$\mathcal{M}$-可測とする. このとき
$\exists\int_X g\,d\nu \iff \exists\int_X g\cdot f\,d\mu$ であり，
また"$\exists$"のとき $\int_X g\,d\nu=\int_X g\cdot f\,d\mu$.

Def2.12 Thm2.11-(1)のνを$f\cdot\mu$で表し，μに関して密度fを持つ測度という. また，$(X,\mathcal{M})$上の測度νが$\nu=f\cdot\mu$を満たすことを$\nu(dx)=f(x)\mu(dx)$とも書き，このときνはμに関して密度fを持つという.
特に$(X,\mathcal{M},\mu)=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),m_d)$ ($\mathbb{R}^d$上のLebesgue測度:例1.8) のときは，「μに関して」を省き，"$\nu(dx)=f(x)\mu(dx)$"を単に
$$\nu(dx)=f(x)\,dx$$ のように書く. $m_d(dx)$の意味!

Thm2.11の証明
(1) $\nu(\phi)=\int_X f\cdot\mathbb{1}_\phi\,d\mu=\int_X f\cdot 0\,d\mu=\int_X 0\,d\mu=0$.
$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M}$, $\forall k\neq j$, $A_k\cap A_j=\phi$ とすると，各$x\in\bigcup_{n=1}^\infty A_n$に対しては$x\in A_{n(x)}$となる$n(x)\in\mathbb{N}$が唯1つ存在し，従って$f\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}=\sum_{n=1}^\infty f\mathbb{1}_{A_n}$が成り立つ. よって
$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\int_X f\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}\,d\mu=\int_X\sum_{n=1}^\infty f\mathbb{1}_{A_n}\,d\mu$$
$$\overset{\text{Prop1.20}}{=}\sum_{n=1}^\infty\int_X f\mathbb{1}_{A_n}\,d\mu=\sum_{n=1}^\infty\nu(A_n).$$
よってνは$(X,\mathcal{M})$上の測度である.
(2) Thm2.10-(2)の証明にならう.
($\boxed{\text{オ1段}}$ $g=\mathbb{1}_A$, $A\in\mathcal{M}$のとき: $\nu(A)=\int_X\mathbb{1}_A\,d\nu$より明らか.)
$\boxed{\text{オ2段}}$ gが非負$\mathcal{M}$-単関数のとき:
$g=\sum_{k=1}^n a_k\mathbb{1}_{A_k}$, $a_k\in[0,\infty)$, $A_k\in\mathcal{M}$, $n\in\mathbb{N}$と書けて，
$$\int_X g\,d\nu=\sum_{k=1}^n a_k\nu(A_k)=\sum_{k=1}^n a_k\int_X f\mathbb{1}_{A_k}\,d\mu$$
$$\overset{\text{線型性}}{=}\int_X\sum_{k=1}^n a_k f\mathbb{1}_{A_k}\,d\mu=\int_X g\cdot f\,d\mu.$$

$\boxed{\text{オ3段}}$ $g:X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測 のとき:
gに対しProp1.17のように$\mathcal{M}$-[redacted]単関数の列$\{s_n\}_{n=1}^\infty$をとると，
オ2段より
$$\int_X s_n\,d\nu=\int_X s_n\cdot f\,d\mu$$
$$\Big\downarrow\ \boxed{n\to\infty,\ \text{MCT}}\ \Big\downarrow\quad (下の注意2.13参照)$$
$$\int_X g\,d\nu=\int_X g\cdot f\,d\mu.$$

$\boxed{\text{オ4段}}$ $g:X\to[-\infty,\infty]$ のとき:
$(g\cdot f)^{\pm}=g^{\pm}\cdot f$ なのでオ3段より $\int_X g^{\pm}\,d\nu=\int_X(g\cdot f)^{\pm}\,d\mu$.
よって $\min\{\int_X g^+\,d\nu,\int_X g^-\,d\nu\}=\min\{\int_X(g\cdot f)^+\,d\mu,\int_X(g\cdot f)^-\,d\mu\}$
であり，これが$<\infty$のとき$\pm$の差をとれば $\int_X g\,d\nu=\int_X g\cdot f\,d\mu$. ■

注意2.13 上のThm2.11の証明・オ3段では $\forall x\in X$, $\lim_{n\to\infty}s_n(x)f(x)=g(x)f(x)$ であることを用いた. これは次の事実から従う:
◎ $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset[0,\infty]$が$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqq a_{n+1}$ かつ $b_n\leqq b_{n+1}$ を満たすとき $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=(\lim_{n\to\infty}a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}b_n)$.
(☺ (I-D) Prop0.7-(2); なおこのとき $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ も成立)

次のPropも次§の例のための準備である:
Prop2.14 Xを可算集合とし，$\varphi:X\to[0,\infty]$とする.
(1) $A\subset X$に対し$\mu_\varphi(A):=\sum_{x\in A}\varphi(x)$と定める.
このときμ_φは$(X,2^X)$上の測度である. ($\mu_\varphi(\{x\})=\varphi(x)$)
(2) $f:X\to[0,\infty]$とするとfは2^X-可測であり，
$$\int_X f\,d\mu_\varphi=\sum_{x\in X}f(x)\varphi(x).$$
(☺ 演習問題とする. (1)は(I-D) Problem1.9, (2)は(I-D) Problem1.20.)

注意2.15 Xが可算無限のとき，$\sum_{x\in X}\varphi(x)$は無限和なので，その定義には注意が必要である: (注 $A=\phi$のとき$\sum_{x\in A}\varphi(x)=0$)
$\varphi:X\to[0,\infty]$とし，$\mathbb{N}\ni n\mapsto x_n\in X$は$\mathbb{N}$から$X$[redacted]の全単射とするとき，
$$\sum_{x\in X}\varphi(x):=\sum_{\text{[redacted]}\,n=1}^{\infty}\varphi(x_n)\overset{(*)}{=}\sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x).$$
(特に，$\sum_{x\in X}\varphi(x)$は全単射 $\mathbb{N}\to X$, $n\mapsto x_n$ の取り方に依らずに定まる.)

等号$(*)$の証明:
$N\in\mathbb{N}$に対し $\sum_{n=1}^N\varphi(x_n)=\sum_{x\in\text{[redacted]}}\varphi(x)\leqq\sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x)$
なので $\sum_{n=1}^\infty\varphi(x_n)=$ [redacted] $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\varphi(x_n)\leqq\sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x)$.
逆に $A\subset X$, Aは有限集合, とするとき
$\exists N\in\mathbb{N}$, $A\subset\{x_1,\cdots,x_N\}$ となるので $\sum_{x\in A}\varphi(x)\leqq\sum_{n=1}^N\varphi(x_n)\leqq\sum_{n=1}^\infty\varphi(x_n)$.
$$\therefore\ \sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x)\leqq\sum_{n=1}^\infty\varphi(x_n).$$ ■

11月5日
ここまで