11月12日 ここから

§3 確率分布の例

<u>用語</u> $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$上の確率測度のことを$\mathbb{R}^d$上の<u>分布</u>(確率分布, (probability) distribution) もしくは$\mathbb{R}^d$上の<u>法則</u>(確率法則, (probability) law) ともいう.

3.1 $\mathbb{N}\cup\{0\}$上の確率分布

<u>例3.1</u> $n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$とする.

$$B(n,p)(\{k\}) := \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k\in\{0,1,\dots,n\}$$

ただし$\binom{n}{k} := {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0^0:=1$. (大きさn, 確率pの<u>二項分布</u>)

二項定理: $\forall x,y\in\mathbb{C}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ を思い出すと, $\sum_{k=0}^n B(n,p)(\{k\}) = (p+(1-p))^n = 1$, 従って$B(n,p)$は$\{0,\dots,n\}$上の確率測度.

<u>例3.2</u> $\lambda\in(0,\infty)$とする.

$$Po(\lambda)(\{n\}) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(パラメータλの<u>Poisson分布</u> ポアソン)

<u>例3.3</u> $\alpha\in[0,1)$とする.

$$Geom(\alpha)(\{n\}) := (1-\alpha)\alpha^n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(パラメータαの<u>幾何分布</u>)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1 = (1-\alpha)(1-\alpha)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^n,$$

従って$Po(\lambda)$, $Geom(\alpha)$は確かに$\mathbb{N}\cup\{0\}$上の確率測度.

<u>注意3.4</u> $S\subset\mathbb{R}$が可算集合のとき, $X:\Omega\to S$について:

Xが($\mathbb{R}$-値関数として)$\mathcal{F}$-可測 $\iff \forall a\in S, X^{-1}(a)\in\mathcal{F}$.

(∵) (⇒) $a\in S$とすると$\{a\}\underset{閉}{\subset}\mathbb{R}$なので$\{a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, よって$X^{-1}(a)\in\mathcal{F}$.
(⇐) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$とすると$A\cap S$は可算なので$X^{-1}(A)=X^{-1}(A\cap S)=\bigcup_{a\in A\cap S}X^{-1}(a)\in\mathcal{F}$.

するとXがreal r.v.かつ可算集合Sに値をとっているとき, Xの分布は$\mathbb{R}$上の分布とも$(S,2^S)$上の確率測度とも思える. そこで以下, <u>可算集合$S\subset\mathbb{R}$に対し$(S,2^S)$上の確率測度μは,</u> ($\mu(\mathbb{R}\setminus S):=0$と考えることにより) <u>$\mathbb{R}$上の分布とみなす.</u>

特に, $B(n,p)$, $Po(\lambda)$, $Geom(\alpha)$は$\mathbb{R}$上の分布とみなされる.

3.2 $\mathbb{R}$上の確率分布

<u>例3.4</u> $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とする.

$$Unif(a,b)(dx) := \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\overbrace{dx}^{m_1(dx)\ (1次元Lebesgue測度)}.$$

($[a,b]$上の<u>一様分布</u>)

<u>例3.5</u> $\alpha\in(0,\infty)$とする.

$$Exp(\alpha)(dx) := \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

(パラメータαの<u>指数分布</u>)

(注 $\underbrace{\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx}_{=\int_{\mathbb{R}}\alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx} \underset{MCT}{=}$ [redacted] $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\int_0^n \alpha e^{-\alpha x}dx}_{=\int_{\mathbb{R}}\alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,n)}(x)dx}$
$= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-\alpha x}\right]_0^n = 1.$)

<u>例3.6</u> $\alpha,\beta\in(0,\infty)$とする.

$$Gamma(\alpha,\beta)(dx) := \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}|x|^{\alpha-1}e^{-\beta x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

$\Gamma(\alpha):=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-y}dy$, $\alpha\in(0,\infty)$ ガンマ関数

(パラメータα,βの<u>ガンマ分布</u>)

(注 $\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \underset{x=y/\beta}{=} \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}e^{-y}\cdot\frac{1}{\beta}dy$
(cf. ①-⊖ Corollary2.41) $= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-y}dy = 1.$)

<u>例3.7</u> $m\in\mathbb{R}$, $v\in[0,\infty)$とする.

$$\begin{cases} N(m,v)(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx & (v>0) \\ N(m,0) := \delta_m & (mにおける単位質量;\ \delta_m(\{m\}):=1) \end{cases}$$

平均m, 分散vの<u>正規分布</u>(Gauss分布)

特にN(0,1)は標準正規分布と呼ばれる.

$v>0$とする. このとき

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx \underset{x=\sqrt{v}y+m}{=} \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \overset{(☆)}{=} 1.$$

従って$N(m,v)$は$\mathbb{R}$上の確率分布である.

(<u>等号(☆)の「証明」</u>:

$$\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2/2}dy\right)^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}dxdy \overset{\text{(Fubini; cf. Thm4.8-(1))}}{=} \int_{\mathbb{R}^2}e^{-|z|^2/2}dz$$

$$\underset{z=(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^{2\pi}re^{-r^2/2}d\theta\right)dr \quad \text{(Riemann積分論より)}$$

$$= \int_0^\infty 2\pi re^{-r^2/2}dr \underset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^n 2\pi re^{-r^2/2}dr$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-2\pi e^{-r^2/2}\right]_0^n = 2\pi. \quad ▨$$
)

さて, Xはreal r.v.で$X\sim N(m,v)$とする.

<u>claim</u> $\mathbb{E}[X]=m$, $var(X)=v$.

(∵) $v=0$のとき, $\mathbb{P}[X=m]=\delta_m(\{m\})=1$なのでProp1.28より
$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[m]=m$, $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[m^2]=m^2<\infty$,
$var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]=\mathbb{E}[0^2]=0=v.$

この計算の仕方は絶対に忘れないように!

そこで $v>0$ と仮定する. このとき $\mathbb{P}_X = N(m,v)$ より

$$\boxed{\mathbb{E}[(X-m)^2] \underset{f(x)=(x-m)^2}{\overset{\text{Thm2.10}}{=\!=\!=}} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 N(m,v)(dx) \overset{\text{Thm2.11-(2)}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx}$$

$$\overset{x=\sqrt{v}y+m}{=\!=} \int_{\mathbb{R}} v y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\overline{\overline{\text{MCT}}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} v y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left[-vy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \right]_{-n}^{n} + \int_{-n}^{n} \frac{v}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

$$\overline{\overline{\text{MCT}}} \lim_{n\to\infty} \left(-2vn \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \right) + \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\left(0 < e^{-\frac{n^2}{2}} \leq \frac{1}{\frac{n^2}{2}+1} \right) \quad = 0 + v \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = v \cdot 1 = v.$$

よって $X-m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, $X=(X-m)+m \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. 従って $\mathbb{E}[|X|]<\infty$ で,

$$\mathbb{E}[X] \underset{\text{系2.10-(1)}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} x N(m,v)(dx) \underset{\text{Thm2.11-(2)}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx$$

$$\overset{x=\sqrt{v}y+m}{=\!=} \int_{\mathbb{R}} (m+\sqrt{v}y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\overline{\overline{\text{DMCT}}}\ m\cdot 1 + \lim_{n\to\infty} \left[-\sqrt{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \right]_{-n}^{n} = m.$$

よって $\mathbb{E}[X]=m$, $var(X) = \mathbb{E}[(X-m)^2] = v$. // (claim)

例3.8 $m\in\mathbb{R}$, $\alpha \in (0,\infty)$ とする.

$$\mathrm{Cauchy}(m,\alpha)(dx) := \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx.$$

(パラメータ m,α の Cauchy分布)

(注 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx \ \overline{\overline{\text{MCT}}}$ [redacted] $\lim_{n\to\infty} \int_{m-n}^{m+n} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx$
$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\pi} \mathrm{Arctan} \frac{x-m}{\alpha} \right]_{m-n}^{m+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \mathrm{Arctan} \frac{n}{\alpha} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1$)

さて, X は real r.v. で $X \sim \mathrm{Cauchy}(m,\alpha)$ とする.
実はこのとき $\mathbb{E}[X]$ は存在しない (∵演習問題とする; ノート Problem3.8)

§4 独立性

以下, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, 特に断らない限り確率変数はこの $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義されているものとする.

Def 4.1 (独立性) $n\in\mathbb{N}$ とし, 各 $k\in\{1,\cdots,n\}$ に対し $d_k \in \mathbb{N}$ で X_k は d_k-dim. r.v. であるとする.

$\{X_k\}_{k=1}^n$: **独立** (independent)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$, $k\in\{1,\cdots,n\}$,

$$\mathbb{P}[X_1\in A_1, \cdots, X_n \in A_n] = \mathbb{P}[X_1\in A_1] \cdots \mathbb{P}[X_n \in A_n]$$

11月12日ここまで+Thm4.12

独立性の取り扱いのために, 測度論からの2つの定理 (確率測度の一意性定理 (Thm4.6)・Fubiniの定理 (Thm4.8)) を準備する. 以下にこれらの定理の証明を与えるが, 講義では証明には触れないので各自で自習されたい.

Def4.2 (乗法族, Dynkin族) X を集合とし, $\mathcal{A}, \mathcal{D} \subset 2^X$ とする.

(1) $\mathcal{A}$: **乗法族** (π-system) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A\cap B \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{D}$: **Dynkin族** (Dynkin system) in X

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (D1) $X \in \mathcal{D}$

(D2) $A, B\in\mathcal{D}$, $A\subset B \Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{D}$.

(D3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ で $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Prop4.3 X を集合とする.

(1) Λ を空でない集合とし, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $\mathcal{D}_\lambda$ は X における Dynkin族であるとする. このとき $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ も X における Dynkin族.

(2) $\mathcal{A} \subset 2^X$ とし

$$\delta_X(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D}\text{は}X\text{のDynkin族} \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D} \quad \cdots (4.1)$$

とおく. このとき $\delta_X(\mathcal{A})$ は, X の Dynkin族で $\mathcal{A}$ を含むもののうち最小のものである. ($\delta_X(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ によって生成される X の Dynkin族といい, 単に $\delta(\mathcal{A})$ とも書く.)
また $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \sigma_X(\mathcal{A})$.

∵ Prop1.7の証明と同様だが一応詳しく述べておく.

(1) $\mathcal{D} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ が Def4.2の(D1),(D2),(D3)を満たすことを示す.

(D1): $\forall \lambda\in\Lambda$, $X\in\mathcal{D}_\lambda$ (∵ $\mathcal{D}_\lambda$ の(D1)) なので $X\in\mathcal{D}$.

(D2): $A, B\in\mathcal{D}$, $A\subset B$ とすると, $\forall\lambda\in\Lambda$ に対し $A, B\in\mathcal{D}_\lambda$, $A\subset B$ なので $\mathcal{D}_\lambda$ の(D2)より $B\setminus A\in\mathcal{D}_\lambda$. ∴ $B\setminus A\in\mathcal{D}$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ で $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$ とすると, $\forall\lambda\in\Lambda$ に対し $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_\lambda$ なので $\mathcal{D}_\lambda$ の(D3)より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_\lambda$.
よって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(2) 2^X は X の Dynkin族で $\mathcal{A}\subset 2^X$ を満たすので, (4.1)における共通部分"$\bigcap$"の添字集合は空でない. よって(4.1)右辺の"$\bigcap$"は定まり, (1)により $\delta_X(\mathcal{A})$ は X の Dynkin族. (4.1)より明らかに, $\mathcal{A}\subset\delta_X(\mathcal{A})$ であり, また $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$ なる X の Dynkin族 $\mathcal{D}$ に対し $\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}$. さらに $\sigma_X(\mathcal{A})$ は明らかに X の Dynkin族で $\mathcal{A}\subset\sigma_X(\mathcal{A})$ を満たすので, $\delta_X(\mathcal{A})\subset\sigma_X(\mathcal{A})$. ■

Thm4.4 (Dynkin族定理) X を集合とし, $\mathcal{A}\subset 2^X$ は乗法族とする. このとき

$$\delta_X(\mathcal{A}) = \sigma_X(\mathcal{A}).$$

Lemma4.5 X を集合とし, $\mathcal{D}$ を X の Dynkin族とする. このとき, $\mathcal{D}$ が乗法族ならば $\mathcal{D}$ は X の σ-加法族である.