☺ (D1)より $X\in\mathcal{D}$ であるので，(D2)より，$\phi=X\setminus X\in\mathcal{D}$，かつ $A\in\mathcal{D}$ に対し $A^c=X\setminus A\in\mathcal{D}$.

さて，$A,B\in\mathcal{D}$ とすると $A^c,B^c\in\mathcal{D}$ が上の議論から分かり，$\mathcal{D}$ は乗法族という仮定から $A^c\cap B^c\in\mathcal{D}$，従ってまた $A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\in\mathcal{D}$.

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}$ とし，$n\in\mathbb{N}$ に対し $B_n:=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ とおくと，$\forall n\in\mathbb{N}$，$B_n\subset B_{n+1}$ であり，また前段落の結果から $\forall n\in\mathbb{N}$，$B_n\in\mathcal{D}$ であるので，(D3)より $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{D}$. ■

Thm4.4の証明

$\delta_X(\mathcal{A})$ が X の σ-加法族であることが示せれば，$\sigma_X(\mathcal{A})$ の最小性から $\sigma_X(\mathcal{A})\subset\delta_X(\mathcal{A})$ が分かり，これとProp4.3-(2)より $\delta_X(\mathcal{A})\subset\sigma_X(\mathcal{A})$ だったことからThm4.4の主張が得られる．そこで $\delta_X(\mathcal{A})$ が X の σ-加法族であることを示せばよく，Lemma4.5よりそのためには $\delta_X(\mathcal{A})$ が乗法族であることを示せばよい.

$Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ とし，$\mathcal{D}_Y:=\{A\subset X \mid A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})\}$ とおく.

claim $\mathcal{D}_Y$ は X のDynkin族.

☺ (D1): $X\cap Y=Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ なので，$X\in\mathcal{D}_Y$.

(D2): $A,B\in\mathcal{D}_Y$，$A\subset B$ とすると，$A\cap Y, B\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$，$A\cap Y\subset B\cap Y$ なので，$\delta_X(\mathcal{A})$ に対する(D2)により $(B\setminus A)\cap Y=(B\cap Y)\setminus(A\cap Y)\in\delta_X(\mathcal{A})$. $\therefore B\setminus A\in\mathcal{D}_Y$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}_Y$ で $\forall n\in\mathbb{N}$，$A_n\subset A_{n+1}$ とすると，$\forall n\in\mathbb{N}$，$A_n\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ かつ $A_n\cap Y\subset A_{n+1}\cap Y$ であるので，$\delta_X(\mathcal{A})$ に対する(D3)より $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap Y)\in\delta_X(\mathcal{A})$.
$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}_Y$. //(claim)

さて，そこでまず $Y\in\mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{A}$ が乗法族であるという仮定から $\forall A\in\mathcal{A}$，$A\cap Y\in\mathcal{A}\subset\delta_X(\mathcal{A})$，従って $\forall A\in\mathcal{A}$，$A\in\mathcal{D}_Y$，すなわち $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}_Y$ となるので，claimと合わせて $\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}_Y$ を得る．$Y\in\mathcal{A}$ は任意なのでこれは $\forall Y\in\mathcal{A}$，$\forall A\in\delta_X(\mathcal{A})$，$A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ を意味する.
A と Y の役割を入れ替えると，各 $Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ に対して $\forall A\in\mathcal{A}$，$A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$，すなわち $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}_Y$ となるのでclaimと合わせて $\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}_Y$. $Y\in\delta_X(\mathcal{A})$ は任意だったので，これは $\delta_X(\mathcal{A})$ が乗法族であることを意味する. ■

注 写像 $f:X\to Y$ と $A\subset X$ に対し，$f|_A:A\to Y$ を $f|_A(x):=f(x)$，$x\in A$，で定める．この $f|_A$ を f の A への制限という.

11月19日ここから

Thm4.6 ((確率)測度の一意性定理)
X を集合，$\mathcal{A}\subset 2^X$ を乗法族とし，μ_1,μ_2 は $(X,\sigma_X(\mathcal{A}))$ 上の測度とする．このとき，もし $\mu_1|_{\mathcal{A}}=\mu_2|_{\mathcal{A}}$ (つまり $\forall A\in\mathcal{A}$，$\mu_1(A)=\mu_2(A)$) かつ $\mu_1(X)=\mu_2(X)<\infty$ ならば $\mu_1=\mu_2$ である.

☺ $\mathcal{D}:=\{A\in\sigma_X(\mathcal{A}) \mid \mu_1(A)=\mu_2(A)\}$ とおく．仮定より $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$.

claim $\mathcal{D}$ は X のDynkin族.

☺ (D1): $X\in\sigma_X(\mathcal{A})$ で，仮定より $\mu_1(X)=\mu_2(X)$ なので $X\in\mathcal{D}$.

(D2): $A,B\in\mathcal{D}$，$A\subset B$ とすると，$k=1,2$ に対し $\mu_k(X)<\infty$ より $\infty>\mu_k(X)\geqq\mu_k(B)=\mu_k(A)+\mu_k(B\setminus A)$ であるので，各集合の測度 $\mu_k(\cdots)$ の値はすべて実数値であり，$B\setminus A\in\sigma_X(\mathcal{A})$，
$\mu_1(B\setminus A)=\mu_1(B)-\mu_1(A)=\mu_2(B)-\mu_2(A)=\mu_2(B\setminus A)$. $\therefore B\setminus A\in\mathcal{D}$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}$ で $\forall n\in\mathbb{N}$，$A_n\subset A_{n+1}$ とすると，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\sigma_X(\mathcal{A})$ であり，$\forall n\in\mathbb{N}$，$\mu_1(A_n)=\mu_2(A_n)$.
よってProp1.6-(3)より $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_2(A_n)$
$=\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$. $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$. //(claim)

$\mathcal{A}$ とclaimから，$\delta_X(\mathcal{A})$ の最小性より $\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}$ となるが，一方 $\mathcal{A}$ は乗法族なのでThm4.4より $\delta_X(\mathcal{A})=\sigma_X(\mathcal{A})$ である．従って $\sigma_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}$，すなわち $\forall A\in\sigma_X(\mathcal{A})$，$\mu_1(A)=\mu_2(A)$ となるので，$\mu_1=\mu_2$. ■

次に，積分の順序交換に関する定理であるFubiniの定理を述べる．そのために次の定義が必要である.

Def4.7 (σ-有限) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.
μ (もしくは $(X,\mathcal{M},\mu)$) が σ-有限
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$，$\begin{cases} X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \mu(X_n)<\infty. \end{cases}$

注 一般に $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$ に対し $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (劣加法性，(1-1) Problem1.11) であることに注意すると，Def4.7においては X_n の代わりに $\bigcup_{k=1}^{n}X_k$ を考えることにより，$\forall n\in\mathbb{N}$，$X_n\subset X_{n+1}$ と仮定してよい.

Thm4.8 ($\mathbb{R}^{n+k}$ 上のFubiniの定理) $n,k\in\mathbb{N}$ とし，μ は $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の σ-有限な測度，ν は $(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の σ-有限な測度とする．また $f:\mathbb{R}^{n+k}\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測とする.

(0) f を $x\in\mathbb{R}^n$ と $y\in\mathbb{R}^k$ の2変数についての関数とみなすとき, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(x,\cdot):\mathbb{R}^k\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測, $\forall y\in\mathbb{R}^k$ に対し $f(\cdot,y):\mathbb{R}^n\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測.

(1) f が $[0,\infty]$-値ならば,

- $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y):\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測,
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x):\mathbb{R}^k\to[0,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測,
- $\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$ (4.2)

(2) $\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)$, $\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$ のうち少なくとも1つは ∞ でないとする. このとき,

- μ-a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(x,\cdot)$ は ν-可積分,
- ν-a.e. $y\in\mathbb{R}^k$ に対し $f(\cdot,y)$ は μ-可積分,
- $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は μ-可積分, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ は ν-可積分であり, 等式(4.2)が成り立つ.

注意4.9 Thm4.8-(2)において, 関数 $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は「$f(x,y)$ が y について ν-可積分であるような x」, すなわち $x\in A:=\left\{z\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^k}|f(z,y)|\,d\nu(y)<\infty\right\}$ に対してしか定義されていないことに注意しよう. Thm4.8-(2)の1つ目の主張は $\mu(\mathbb{R}^n\setminus A)=0$ ということであり, $\mathbb{R}^n\setminus A$ 上では $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は 0 であると約束する.
($\mu(\mathbb{R}^n\setminus A)=0$ なので, Prop1.28により, 0以外の値としてもよい.)
$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ についても同様の注意があてはまる.

Thm4.8の証明

(0) $y\in\mathbb{R}^k$ を固定し, $\mathcal{A}_y:=\left\{A\subset\mathbb{R}^{n+k} \,\middle|\, \mathbb{1}_A(\cdot,y)\text{ は }\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\text{-可測}\right\}$ とおく. $I\in\mathcal{I}_{n+k}$ (Prop1.9参照) とするとある $I_1\in\mathcal{I}_n$, $I_2\in\mathcal{I}_k$ により $I=I_1\times I_2$ と書け, 従って $\mathbb{1}_I(\cdot,y)=\mathbb{1}_{I_2}(y)\cdot\mathbb{1}_{I_1}$ となるので $I\in\mathcal{A}_y$, すなわち $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}_y$.

claim $\mathcal{A}_y$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の σ-加法族.

∵ $\mathbb{1}_\phi(\cdot,y)=0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\phi\in\mathcal{A}_y$ であり, $A\in\mathcal{A}_y$ ならば $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A}(\cdot,y)=1-\mathbb{1}_A(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\mathbb{R}^{n+k}\setminus A\in\mathcal{A}_y$. $\{A_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{A}_y$ とすると,
$\mathbb{1}_{\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)}(\cdot,y)=\lim_{m\to\infty}\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_1}\cdots\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m}\right)(\cdot,y)$
はProp1.14より $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)\in\mathcal{A}_y$ であり, よって $\bigcup_{m=1}^\infty A_m=\mathbb{R}^{n+k}\setminus\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)\in\mathcal{A}_y$ //(claim)

claim と $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}_y$ より $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\sigma(\mathcal{I}_{n+k})\subset\mathcal{A}_y$, すなわち $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$, $\mathbb{1}_A(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測.

さて $f(\cdot,y)$ に関して, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ または $A=\{\infty\}$ または $A=\{-\infty\}$ とすると,
$$(f(\cdot,y))^{-1}(A)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, (x,y)\in f^{-1}(A)\right\}=\left(\mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(\cdot,y)\right)^{-1}(1)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$
が前段落の結果と $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ より従う. よって $f(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測であり, 同様に $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x,\cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測である.

(1) μ,ν が σ-有限との仮定から, $\{X_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と $\{Y_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ を, $\mathbb{R}^n=\bigcup_{m=1}^\infty X_m$, $\mathbb{R}^k=\bigcup_{m=1}^\infty Y_m$, かつ $\forall m\in\mathbb{N}$, $\mu(X_m)<\infty$, $X_m\subset X_{m+1}$, $\nu(Y_m)<\infty$, $Y_m\subset Y_{m+1}$ となるように選ぶことができる. さて $m\in\mathbb{N}$ を固定し
$$\mathcal{A}_m:=\left\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \,\middle|\, f=\mathbb{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}\text{ は(1)の主張を全て満たす}\right\}$$
とおく.
(注 $X_m\times Y_m\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ である; 下の注意4.11参照.)

claim1 $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}_m$.

∵ $I\in\mathcal{I}_{n+k}$ とすると, $\exists I_1\in\mathcal{I}_n$, $\exists I_2\in\mathcal{I}_k$, $I=I_1\times I_2$ であり, すると
$$\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{I\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)=\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{I_1\cap X_m}(\cdot)\mathbb{1}_{I_2\cap Y_m}(y)\,d\nu(y)=\nu(I_2\cap Y_m)\mathbb{1}_{I_1\cap X_m}$$
は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測,
$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{I\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{I_2\cap Y_m}(\cdot)\mathbb{1}_{I_1\cap X_m}(x)\,d\mu(x)=\mu(I_1\cap X_m)\mathbb{1}_{I_2\cap Y_m}$$
は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測
となり, さらに前者の μ-積分, 後者の ν-積分は共に $\mu(I_1\cap X_m)\cdot\nu(I_2\cap Y_m)$ で等しい. 以上より $f=\mathbb{1}_{I\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張の性質を全て満たすので $I\in\mathcal{A}_m$, よって $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}_m$. //(claim1)

claim2 $\mathcal{A}_m$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の Dynkin族.

∵ (D1): $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}\cap(X_m\times Y_m)}(x,y)=\mathbb{1}_{X_m}(x)\mathbb{1}_{Y_m}(y)$ であるので, この $d\nu(y)$-積分は $\nu(Y_m)\mathbb{1}_{X_m}(x)$ で $x\in\mathbb{R}^n$ について $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測, さらにその $d\mu(x)$-積分は $\mu(X_m)\nu(Y_m)$. $d\mu(x)$ と $d\nu(y)$ の順を入れ換えても同様なので, $f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張を全て満たす. よって $\mathbb{R}^{n+k}\in\mathcal{A}_m$.

(D2): $A,B\in\mathcal{A}_m$, $A\subset B$ とする. このとき, $C\in\{A,B\}$ に対し

- $\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{C\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測かつ
$$\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{C\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\le\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{X_m}(\cdot)\mathbb{1}_{Y_m}(y)\,d\nu(y)=\overset{<\infty!}{\overline{\nu(Y_m)}}\mathbb{1}_{X_m},$$
さらに左辺の μ-積分は $\int_{\mathbb{R}^n}\nu(Y_m)\mathbb{1}_{X_m}\,d\mu=\underbrace{\mu(X_m)\nu(Y_m)}_{<\infty!}$ 以下.