$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{C\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$ とその ν-積分についても同様であるので，$f=1_{C\cap(X_m\times Y_m)}$ に対し(1)の主張の4つの積分は $[0,\infty)$-値である．そこで $1_{B\cap(X_m\times Y_m)}-1_{A\cap(X_m\times Y_m)}$
$= 1_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}$
に注意して，$1_{B\cap(X_m\times Y_m)}, 1_{A\cap(X_m\times Y_m)}$ が(1)の主張を満たすことから，$\int_{\mathbb{R}^k}1_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$

$\overset{\text{Thm 1.24-(2)}}{=} \int_{\mathbb{R}^k}1_{B\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y) - \int_{\mathbb{R}^k}1_{A\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$,

は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，

$\int_{\mathbb{R}^n}1_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$

$\overset{\text{Thm 1.24-(2)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}1_{B\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}^n}1_{A\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$

は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測であり，かつ前者の μ-積分と後者の ν-積分が(再び積分の線型性を用いると)一致することが分かる．すなわち，$B\setminus A\in\mathcal{A}_m$.

(D3): $\{A_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}_m$, $\forall\ell\in\mathbb{N}$, $A_\ell\subset A_{\ell+1}$ とする．このとき

- $\forall\ell\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^k}1_{A_\ell\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\le\int_{\mathbb{R}^k}1_{A_{\ell+1}\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$,
  $\int_{\mathbb{R}^n}1_{A_\ell\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)\le\int_{\mathbb{R}^n}1_{A_{\ell+1}\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$.
- $\int_{\mathbb{R}^k}1_{A_\ell\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\xrightarrow[\ell\to\infty]{\text{MCT}}\int_{\mathbb{R}^k}1_{(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}A_\ell)\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$,
  $\int_{\mathbb{R}^n}1_{A_\ell\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^n}1_{(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}A_\ell)\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$.

従って，各$\ell\in\mathbb{N}$に対し

$1_{A_\ell\cap(X_m\times Y_m)}$ が(1)の主張を満たすことから，その$\ell\to\infty$とした極限を考えProp1.14とMCTを用いることで(1)の主張が $1_{(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}A_\ell)\cap(X_m\times Y_m)}$ に対して成り立つことが分かる．よって $\bigcup_{\ell=1}^{\infty}A_\ell\in\mathcal{A}_m$.
以上より $\mathcal{A}_m$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の Dynkin族である．//(claim2)

claim1とclaim2より $\delta(\mathcal{I}_{n+k})\subset\mathcal{A}_m$ であるが，一方 $\mathcal{I}_{n+k}$ は乗法族であることが容易に確認できるので，Thm4.4とProp1.9により $\delta(\mathcal{I}_{n+k})=\sigma(\mathcal{I}_{n+k})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$，
従って $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\subset\mathcal{A}_m$ である．すなわち，
$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ に対し $1_{A\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張を全て満たす．
ところがここで $m\in\mathbb{N}$ は任意であり，

- $\forall m\in\mathbb{N}$, $1_{A\cap(X_m\times Y_m)}\le 1_{A\cap(X_{m+1}\times Y_{m+1})}$,
- $\lim_{m\to\infty}1_{A\cap(X_m\times Y_m)}=1_A$

であるので，上の claim2-(D3)の証明と同様に $m\to\infty$ とした極限をとりProp1.14とMCTを用いれば，(1)の主張の $f=1_A$ に対しての成立が，$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ について従う．

あとは積分の線型性(Thm1.18-(3))とProp1.12により，(1)は f が $[0,\infty)$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数の場合にも成り立つことが分かり，すると一般の f に対してはProp1.17のような $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数の列 $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ を取って，s_m に対する(1)の主張で $m\to\infty$ としてMCTとProp1.14を用いればよい．

(2) (1)で得られた(4.2)を$|f|$に適用し仮定と合わせると，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)<\infty.$$

よってProp1.27-(2)より $\mu(M)=\nu(N)=0$，ただし

$M:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)=\infty\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
$N:=\{y\in\mathbb{R}^k \mid \int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)=\infty\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. (1)の前半の主張より

そこで

$F_\pm := 1_{\mathbb{R}^n\setminus M}\cdot\int_{\mathbb{R}^k}f^\pm(\cdot,y)\,d\nu(y)$,
$G_\pm := 1_{\mathbb{R}^k\setminus N}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}f^\pm(x,\cdot)\,d\mu(x)$

とおくと，$F_\pm$は$[0,\infty)$-値で(1)の前半により$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，同様に$G_\pm$は$[0,\infty)$-値で(1)の前半により$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測．
$\mu(M)=0=\nu(N)$なのでProp1.28と(1)の(4.2)より，

$$\int_{\mathbb{R}^n}F_\pm\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}f^\pm(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^\pm(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int_{\mathbb{R}^k}G_\pm\,d\nu$$
$$\le\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)<\infty.$$

よって $F_\pm\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $G_\pm\in\mathcal{L}^1(\nu)$ であり，Thm1.24-(2)より

$$\int_{\mathbb{R}^n}(F_+-F_-)\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^n}F_+\,d\mu-\int_{\mathbb{R}^n}F_-\,d\mu$$
$$=\int_{\mathbb{R}^k}G_+\,d\nu-\int_{\mathbb{R}^k}G_-\,d\nu=\int_{\mathbb{R}^k}(G_+-G_-)\,d\nu.$$

ところが，$x\in\mathbb{R}^n\setminus M$, $y\in\mathbb{R}^k\setminus N$ に対して

$(F_+-F_-)(x)=\int_{\mathbb{R}^k}f^+(x,y)\,d\nu(y)-\int_{\mathbb{R}^k}f^-(x,y)\,d\nu(y)$
$=\int_{\mathbb{R}^k}f(x,y)\,d\nu(y)$, ($x\in M$のときは両辺共0で等しい)

$(G_+-G_-)(y)=\int_{\mathbb{R}^n}f^+(x,y)\,d\mu(x)-\int_{\mathbb{R}^n}f^-(x,y)\,d\mu(x)$
$=\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,d\mu(x)$ ($y\in N$のときは両辺共0で等しい)

であるので，等式 $\int_{\mathbb{R}^n}(F_+-F_-)\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^k}(G_+-G_-)\,d\nu$ は f に対する(4.2)を意味し，同時に $\int_{\mathbb{R}^k}f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ がμ-可積分，$\int_{\mathbb{R}^n}f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ がν-可積分であることも分かる．

以上で Fubiniの定理(Thm4.8)の証明が完了した． ■

注意4.10 Thm4.8-(1),(2)の状況で, $\mu = m_n, \nu = m_k$ (つまりμ,νが共にLebesgue測度)である場合には(4.2)の両辺は$\mathbb{R}^{n+k}$上のLebesgue測度m_{n+k}による積分
$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz$$
に等しい.

∵ Thm4.8-(1)については, $X_m := [-m,m]^n$, $Y_m := [-m,m]^k$ と取り,「(4.2)の両辺 $= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz$」を主張に追加した上で同様の証明を行えばよい. ただし「claim1 $\mathcal{I}_{n+k} \subset \mathcal{A}_m$」及び「claim2-(D1) $\mathbb{R}^{n+k} \in \mathcal{A}_m$」の証明には, Lebesgue測度の定義(例1.8参照)から直ちに従う次の事実を用いる:
$$\forall I_1 \in \mathcal{I}_n,\ \forall I_2 \in \mathcal{I}_k,\ m_n(I_1)\cdot m_k(I_2) = m_{n+k}(I_1\times I_2).$$
Thm4.8-(2)については, その上記の証明によってこの場合の(4.2)の両辺の値が$f^\pm$に対する同様の積分の差になっていることから, 前段落の結果によりそれはさらに $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f^+(z)dz - \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f^-(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz\ (\in \mathbb{R})$ 等しいことになり, よって成り立つ. ■

注意4.11 $n,k\in\mathbb{N}$とし,
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) := \{A\times B \mid A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$$
と定める. このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$.

∵ $\mathcal{I}_{n+k} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ なので
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \underset{\text{Prop1.9}}{=} \sigma(\mathcal{I}_{n+k}) \subset \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ である.
$\mathbb{R}^{n+k}$の各元を(x,y), $x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^k$の形に書き表すこととし, $X:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$, $Y:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$を
$$X(x,y):=x,\quad Y(x,y):=y$$
により定める. X,Yは可測空間$(\mathbb{R}^{n+k},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}))$上で定義された確率変数とみなせることが, (X,Y)(すなわち$\mathbb{R}^{n+k}$の恒等写像$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+k}}$)が$(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}))$上の$(n+k)$-dim. r.v. であることとProp2.3より分かる. 従って$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$に対し
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \ni X^{-1}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+k} \mid x\in A\} = A\times\mathbb{R}^k,$$
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \ni Y^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+k} \mid y\in B\} = \mathbb{R}^n\times B,$$
よって $A\times B = (A\times\mathbb{R}^k)\cap(\mathbb{R}^n\times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ となるので, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$. ゆえに
$\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ であり, これと冒頭の議論から $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ が得られる. ■

Def4.1で確率変数の独立性を定義したが, 独立性は次のように期待値を各確率変数の分布での逐次積分として表すことを可能にする:

Thm4.12 $n,k\in\mathbb{N}$, Xはn-dim. r.v., Yはk-dim. r.v.とし, $\{X,Y\}$は独立とする. また$f:\mathbb{R}^{n+k}\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測とする.
(1) fが$[0,\infty]$-値ならば
$$\begin{aligned} E[f(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathbb{P}_X(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy). \end{aligned} \quad \text{------(4.3)}$$
(2) $|f|$に対する(4.3)の3辺のいずれか1つ(従って3つ全て)が∞と異なるならば, fに対して(4.3)が成り立つ.

(注 Prop2.4とThm2.10は全く同様の証明により, fが$[-\infty,\infty]$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測関数でも成り立つことに注意.)

Thm4.12の証明 Thm4.8-(1),(2)の証明にならう.
(1) $\mathcal{A} := \{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \mid f = \mathbb{1}_A$に対して(4.3)の1行目が成立$\}$
とおく. ((4.3)の2行目の"="はThm4.8-(1)により既知.)

claim1 $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}$.
∵ $I\in\mathcal{I}_{n+k}$とすると, $\exists I_1\in\mathcal{I}_n, \exists I_2\in\mathcal{I}_k, I = I_1\times I_2$であり, すると
$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_I(X,Y)] &= E[\mathbb{1}_{\{X\in I_1, Y\in I_2\}}] = \mathbb{P}[X\in I_1, Y\in I_2] \\ &\underset{\{X,Y\}\text{独立}}{=} \mathbb{P}[X\in I_1]\cdot\mathbb{P}[Y\in I_2] = \mathbb{P}_X(I_1)\mathbb{P}_Y(I_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{I_1\times I_2}(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx) \end{aligned}$$
となるので $I=I_1\times I_2\in\mathcal{A}$. よって $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}$. //(claim1)

claim2 $\mathcal{A}$は$\mathbb{R}^{n+k}$のDynkin族.
∵(D1): $f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}}=1$に対して(4.3)の1行目は両辺共1なので$\mathbb{R}^{n+k}\in\mathcal{A}$.
(D2): $A,B\in\mathcal{A}$, $A\subset B$とするとき, $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$に注意して, Thm1.24-(2)を用いて$f=\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B$に対する(4.3)の1行目の両辺それぞれで差をとれば$f=\mathbb{1}_{B\setminus A}$に対する(4.3)の1行目を得るので$B\setminus A\in\mathcal{A}$.
(D3): $\{A_\ell\}_{\ell=1}^\infty\subset\mathcal{A}$, $\forall\ell\in\mathbb{N}, A_\ell\subset A_{\ell+1}$のとき, MCTを用いて$f=\mathbb{1}_{A_\ell}$に対する(4.3)の1行目で$\ell\to\infty$とすれば$\bigcup_{\ell=1}^\infty A_\ell\in\mathcal{A}$が得られる. //(claim2)

よって $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \underset{\text{Prop1.9}}{=} \sigma(\mathcal{I}_{n+k}) \underset{\text{Thm4.4}}{=} \delta(\mathcal{I}_{n+k}) \subset \mathcal{A}$
となるので, $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$, $f=\mathbb{1}_A$に対し(4.3)の1行目が成立つ. あとは積分の線型性(Thm1.18-(3))により, (4.3)の1行目はfが$[0,\infty)$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数に対しても成り立つことが分かり, そこでProp1.17とMCTにより一般のfに対しても成立つことが示される.
(2) $(f(X,Y))^\pm = f^\pm(X,Y)$とThm4.8-(2)の証明中の議論に注意して, $f^\pm$に対する(4.3)について各辺それぞれの差をとればfに対する(4.3)が得られる. ■