11月26日ここから

Prop4.13 $n\in\mathbb{N}$, また各$k\in\{1,\cdots,n\}$に対し$d_k\in\mathbb{N}$, X_kはd_k-dim. r.v.とし, $\{X_k\}_{k=1}^n$は独立であるとする.

(1) $^\forall I\subset\{1,\cdots,n\}$, $\{X_k\}_{k\in I}$は独立.

(2) 各$k\in\{1,\cdots,n\}$に対し$f_k:\mathbb{R}^{d_k}\to\mathbb{R}$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$-可測とするとき, $\{f_k(X_k)\}_{k=1}^n$は独立.

(3) $k\in\mathbb{N}$, $k<n$とし, $Y:=(X_1,\cdots,X_k)$, $Z:=(X_{k+1},\cdots,X_n)$とおく. このとき$\{Y,Z\}$は独立.

☺ (1) 各$k\in I$に対し$A_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$を任意にとり, また$k\in\{1,\cdots,n\}\setminus I$に対し$A_k:=\mathbb{R}^{d_k}$とおく. このとき$\{X_k\}_{k=1}^n$の独立性から $\mathbb{P}[^\forall k\in I, X_k\in A_k]=\mathbb{P}[X_1\in A_1,\cdots,X_n\in A_n]$
$=\mathbb{P}[X_1\in A_1]\cdots\mathbb{P}[X_n\in A_n]=\prod_{k\in I}\mathbb{P}[X_k\in A_k]$
となることが分かる($k\in\{1,\cdots,n\}\setminus I$に対し$\mathbb{P}[X_k\in A_k]=1$, を用いた).

(2) $\{A_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$とすると, $^\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $f_k^{-1}(A_k)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$なので, $\mathbb{P}[f_1(X_1)\in A_1,\cdots,f_n(X_n)\in A_n]$
$=\mathbb{P}[X_1\in f_1^{-1}(A_1),\cdots,X_n\in f_n^{-1}(A_n)]$
$\underset{\{X_k\}_{k=1}^n \text{独立}}{=}\mathbb{P}[X_1\in f_1^{-1}(A_1)]\cdots\cdots\mathbb{P}[X_n\in f_n^{-1}(A_n)]$
$=\mathbb{P}[f_1(X_1)\in A_1]\cdots\cdots\mathbb{P}[f_n(X_n)\in A_n]$.

(3) $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$, $B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$ $(D_1:=\sum_{j=1}^k d_j, D_2:=\sum_{j=1+k}^n d_j)$に対し $\mu_1(B_1,B_2):=\mathbb{P}[Y\in B_1, Z\in B_2]$,
$\mu_2(B_1,B_2):=\mathbb{P}[Y\in B_1]\mathbb{P}[Z\in B_2]$とおく.
$\mu_1=\mu_2$を示せばよい.

claim1 $\mu_1(B_1,B_2)$, $\mu_2(B_1,B_2)$は, $B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$を固定すると$B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$について, $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$を固定すると$B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$についての測度になる. (☺ Thm2.10-(1)の証明と全く同様.)

claim2 $^\forall B_2\in\mathcal{J}_{D_2}$, $\mu_1(\cdot,B_2)=\mu_2(\cdot,B_2)$.

☺ $B_2\in\mathcal{J}_{D_2}$とする. $\{X_j\}_{j=1}^n$の独立性により, $\mu_1(\cdot,B_2)$と$\mu_2(\cdot,B_2)$は乗法族$\mathcal{J}_{D_1}$の上では一致していることが分かり(μ_2に対しては, (1)より$\{X_j\}_{j=1}^k$, $\{X_j\}_{j=k+1}^n$が独立なことを用いる), さらに$\mu_1(\mathbb{R}^{D_1},B_2)=\mathbb{P}[Z\in B_2]=\mu_2(\mathbb{R}^{D_1},B_2)<\infty$である.
よってThm4.6より$\sigma(\mathcal{J}_{D_1})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$上$\mu_1(\cdot,B_2)=\mu_2(\cdot,B_2)$. // (claim2)

claim3 $^\forall B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$, $\mu_1(B_1,\cdot)=\mu_2(B_1,\cdot)$.

☺ $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$とする. claim2より$\mu_1(B_1,\cdot)$と$\mu_2(B_1,\cdot)$は乗法族$\mathcal{J}_{D_2}$の上では一致し, さらに$\mathbb{R}^{D_2}$に対しては共に$\mathbb{P}[Y\in B_1]\,(<\infty)$に等しい. よってThm4.4により$\sigma(\mathcal{J}_{D_2})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$上で$\mu_1(B_1,\cdot)=\mu_2(B_1,\cdot)$. // (claim3) ▨

Prop4.14 $n\in\mathbb{N}$とし, $\{X_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$は独立とする. このとき:

(1) $X_1\cdot\cdots\cdot X_n\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1\cdot\cdots\cdot X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdot\cdots\cdot\mathbb{E}[X_n]$.

(2) $var(\sum_{k=1}^n X_k)=\sum_{k=1}^n var(X_k)$. 11月19日ここまで

☺ (1) nについての数学的帰納法により示す. $n=1$のときは自明. $n\geqq2$とし, $n-1$に対しては主張が成り立つと仮定する. $Y:=X_1\cdot\cdots\cdot X_{n-1}$とおく. $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$を$f(x_1,\cdots,x_{n-1}):=x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}$で定めると$f$は連続なのでLemma1.15により$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$-可測であり, すると$Y=f(X_1,\cdots,X_{n-1})$なので Prop4.13-(2),(3)により$\{Y,X_n\}$は独立である.
$\mathbb{R}^2\ni(y,x)\longmapsto xy\in\mathbb{R}$も連続, 従ってLemma1.15より$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測なので, $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|xy|\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)\underset{\text{Thm2.10-(2)}}{=}\mathbb{E}[|X_n|]\cdot\mathbb{E}[|Y|]<\infty$であることに注意するとThm4.12-(2)により$YX_n\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$,
$\mathbb{E}[X_1\cdot\cdots\cdot X_n]=\mathbb{E}[YX_n]=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}xy\,\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)$
$\underset{\text{系2.10-(1)}}{=}\mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdot\cdots\cdot\mathbb{E}[X_n]$.
よってnに対する主張が示せ, 帰納法が完了した.

(2) まず $^\forall X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ に注意する. (実際, $X\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$なら$X-\mathbb{E}[X]\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$なので両辺とも$\infty$に等しい.) $Y_k:=X_k-\mathbb{E}[X_k]$とおく. Prop4.13-(2)より$\{Y_k\}_{k=1}^n$は独立であり, $\mathbb{E}[Y_k]=0$, $var(X_k)=\mathbb{E}[Y_k^2]$である. また
$var(\sum_{k=1}^n X_k)=\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n X_k-\mathbb{E}[\sum_{k=1}^n X_k])^2]=\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n Y_k)^2]$.
さて,
$$\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)^2=\sum_{k=1}^n Y_k^2+2\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k \quad\cdots(4.4)$$
であり, (1)により $\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$,
(とProp4.13-(1)) $\mathbb{E}[\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k]=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\mathbb{E}[Y_j]\mathbb{E}[Y_k]=0$.
よって$\{Y_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ならば(4.4)の両辺の$\mathbb{E}[\cdots]$を取れば主張が得られ, $\{Y_k\}_{k=1}^n\not\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ならば(4.4)より$\sum_{k=1}^n Y_k\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$であるので$\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n Y_k)^2]=\infty=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}[Y_k^2]$. ▨

例4.15 $p\in[0,1]$とする. $\{0,1\}$上の確率測度$Be(p)$を次で定める:
$Be(p)(\{0\}):=1-p$, $Be(p)(\{1\}):=p$. (確率pのBernoulli分布)
(つまり$Be(p):=B(1,p)$.)
Xがreal r.v.で$X\sim Be(p)$のとき,
$\mathbb{E}[X]=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p=\mathbb{E}[X^2]$, $var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$
$=p(1-p)$.

さて, $\{X_k\}_{k=1}^n$を独立なreal r.v.'sで$^\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $X_k\sim Be(p)$なるものとする(そのような$\{X_k\}_{k=1}^n$は存在する; Thm4.17参照).

<u>claim</u> $S:=\sum_{k=1}^{n}X_k\sim B(n,P)$.

∵ $\forall k\in\{0,\cdots,n\}$,

$$\mathbb{P}[S=k]=\underbrace{\sum_{\substack{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}}}_{\binom{n}{k}\text{個}}\mathbb{P}[X_1=\alpha_1,\cdots,X_n=\alpha_n]=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$
$$=B(n,P)(\{k\}).\ /\!/\ (\text{claim})$$

すると $B(n,P)$ を分布とする real r.v. の平均, 分散は

$$\mathbb{E}[S]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k]=nP,\quad var(S)\underset{\text{Prop 4.14-(2)}}{=\!=}\sum_{k=1}^{n}var(X_k)=nP(1-P).$$

<u>Def4.16</u>(確率変数の$\boxed{\text{無限列}}$の独立性)

各$n\in\mathbb{N}$に対し$d_n\in\mathbb{N}$でX_nはd_n-dim. r.v. とする.

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: 独立 (independent)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ が (Def4.1の意味で) 独立.

<u>Thm4.17</u>(独立確率変数列の存在) $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$とする. 各$n\in\mathbb{N}$, $n\leqq N$に対し, $d_n\in\mathbb{N}$としμ_nは$\mathbb{R}^{d_n}$上の分布とする. このとき$\exists(\Omega^o,\mathcal{F}^o,\mathbb{P}^o)$: 確率空間, また各$n\in\mathbb{N}$, $n\leqq N$に対し$\exists X_n$: d_n-dim. r.v., $X_n\sim\mu_n$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ は独立.

(∵ $N\in\mathbb{N}$のとき: ①-① Thm2.26とThm3.28 ……Fubiniの定理 (Thm4.8-(1)) からもう少し頑張れば証明できる. (そう難しくない)

$N=\infty$のとき: ①-① Thm3.65とThm3.40 (難しい!))

次に,「ある事象が a.s. に(つまり確率1で)起こること」の証明によく使われる定理 (Borel-Cantelliの補題) を与える. 次の定義が必要である:

<u>Def4.18</u> $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset 2^{\Omega}$に対し

$$\limsup_{n\to\infty}A_n:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\{\omega\in\Omega\mid\text{無限個の}n\text{に対し}\omega\in A_n\}$$
$$\liminf_{n\to\infty}A_n:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\{\omega\in\Omega\mid\text{ある有限個の}n\text{以外の全ての}n\text{に対し}\omega\in A_n\}$$

● $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}\Rightarrow\limsup_{n\to\infty}A_n,\ \liminf_{n\to\infty}A_n\in\mathcal{F}$.

<u>Thm4.19</u>(Borel-Cantelliの補題) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n]<\infty\Longrightarrow\mathbb{P}[\liminf_{n\to\infty}A_n^c]=1$.

(2) $\{1_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$が独立で$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n]=\infty$

$\Longrightarrow\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty}A_n]=1$.

Thm4.19-(2)の証明に次の基本的事実が必要である:

<u>Lemma4.20</u> $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1)$とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}(1-P_1)\cdot\cdots\cdot(1-P_n)=0\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\infty.$$

∵ ($\Longleftarrow$) $\forall x\in[0,1]$, $0\leqq 1-x\leqq e^{-x}$ なので, $x=P_1,\cdots,P_n$として

$$0\leqq(1-P_1)\cdot\cdots\cdot(1-P_n)\leqq\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}P_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}(1-P_1)\cdot\cdots\cdot(1-P_n)=0.$$

($\Longrightarrow$) $P_n>\frac{1}{2}$となる$n\in\mathbb{N}$が無限個あれば明らかに$\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\infty$ であるので, $\{n\in\mathbb{N}\mid P_n>\frac{1}{2}\}$は有限集合である, すなわち

$\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N$, $P_n\leqq\frac{1}{2}$ と仮定してよい.

このとき, $\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$, $e^{-2x}\leqq 1-x$ であることに注意すると

(実際, $g(x):=1-x-e^{-2x}$とすると$g'(x)=2e^{-2x}-1$より, gは$[0,\frac{1}{2}\log 2]$で増加, $[\frac{1}{2}\log 2,\frac{1}{2}]$で減少するので, $x\in[0,\frac{1}{2}]$に対し $g(x)\geqq\min\{g(0),g(\frac{1}{2})\}=\min\{0,\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\}=0$.)

$n\geqq N$に対し $\exp\left(-2\sum_{k=N}^{n}P_k\right)\leqq(1-P_N)\cdot\cdots\cdot(1-P_n)$, 従って

$$\sum_{k=1}^{n}P_k\geqq\sum_{k=N}^{n}P_k\geqq-\frac{1}{2}\log((1-P_N)\cdot\cdots\cdot(1-P_n))\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\infty$. ■

<u>Thm4.19の証明</u>

(1) $k\in\mathbb{N}$とすると測度の劣加法性(Def4.7の後の注)により,

$$\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty}A_n]=\mathbb{P}\left[\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty}A_n\right]\leqq\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right]$$
$$\overset{\text{劣加法性}}{\leqq}\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}[A_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n]-\sum_{n=1}^{k-1}\mathbb{P}[A_n]\xrightarrow[k\to\infty]{}0\ \left(∵\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n]<\infty\right).$$

よって $\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty}A_n]=0$であり,

$$\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)^c=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c=\liminf_{n\to\infty}A_n^c$$

であるので $\mathbb{P}[\liminf_{n\to\infty}A_n^c]=1-\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty}A_n]=1-0=1$.

(2) $n\in\mathbb{N}$とする. $\{\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c\}_{l=n}^{\infty}\subset\mathcal{F}$は$l$について非増加かつ $\bigcap_{l=n}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c)=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c$ なので Prop1.6-(4)が使えて,

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)^c\right]=\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c\right]$$
$$\overset{\text{Prop1.6-(4)}}{=}\lim_{l\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c\right]$$
$$=\lim_{l\to\infty}\mathbb{P}[1_{A_n}=0,\cdots,1_{A_l}=0]$$
$$\overset{\text{Prop4.13-(1)より}\{1_{A_k}\}_{k=n}^{l}\text{は独立}}{=}\lim_{l\to\infty}\mathbb{P}[1_{A_n}=0]\cdot\cdots\cdot\mathbb{P}[1_{A_l}=0]$$
$$=\lim_{l\to\infty}(1-\mathbb{P}[A_n])\cdot\cdots\cdot(1-\mathbb{P}[A_l])$$
$$\overset{\text{Lemma4.20}}{=}0.\quad\therefore\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right]=1-0=1.$$

さらに $\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$は$n$について非増加かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=\limsup_{n\to\infty}A_n$ なので, 再びProp1.6-(4)により

$$\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty}A_n]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right]=\lim_{n\to\infty}1=1.$$ ■