§5 確率変数列の収束概念

次の§6で, 独立な$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$で$\forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]$を満たすものについて, 「収束」

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=\mathbb{E}[X_1]$$

を考えるが, 確率変数の「収束」には複数の定式化がある:

Def.5.1 $d\in\mathbb{N}$とし, $X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$をd-dim. r.v.s とする.

(1) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに概収束する($X_n\xrightarrow{a.s.}X$)

$\overset{def}{\iff}\lim_{n\to\infty}X_n=X$ a.s.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに確率収束する($X_n\xrightarrow{P}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall\varepsilon\in(0,\infty),\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=0.$

(3) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに法則収束するまたは分布収束する($X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$有界連続 に対し $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$

$\underset{\text{Thm 2.10-(2)}}{\iff}\forall f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$有界連続 に対し $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{P}_{X_n}(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{P}_X(dx).$

(注 $f:S\to\mathbb{C}$有界$\overset{def}{\iff}\sup_{x\in S}|f(x)|<\infty.$)

(4) $p\in(0,\infty)$とする. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXにL^p-収束する($X_n\xrightarrow{L^p}X$)

$\overset{def}{\iff}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X_n-X|^p]=0.$

(5) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXにBorel-Cantelliの意味で収束する($X_n\xrightarrow{BC}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall\varepsilon\in(0,\infty),\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]<\infty.$

注意5.2 上のDef.5.1-(3)において, $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$の定義には各確率変数の分布$\mathbb{P}_{X_n}$と$\mathbb{P}_X$しか関与していないことに注意されたい. 従って, $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$の定義は$X,X_1,X_2,\cdots$がそれぞれ別々の確率空間上で定義されている場合にも通用する.

12月3日 ここから

11月26日 ここまで

Thm 5.3 $d\in\mathbb{N}$とし, $X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$はd-dim. r.v.s とする. このとき:

$$(X_n\xrightarrow{BC}X)\overset{(1)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{a.s.}X)\overset{(2)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{P}X)\overset{(3)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X)$$

$$(X_n\xrightarrow{L^p}X)\overset{(4)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{P}X)\qquad((4)\text{で}p\in(0,\infty)\text{は任意.})$$

Lemma 5.4 $d\in\mathbb{N}$とし, $X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$はd-dim. r.v.s とする. このとき,

$X_n\xrightarrow{P}X\Longrightarrow\exists\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k)}\xrightarrow{BC}X.$

∵ $n(0):=0$とし, $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を帰納的に以下で定める:

$n(k):=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n>n(k-1),\ \mathbb{P}[|X_n-X|\geqq2^{-k}]\leqq2^{-k}\},$

$k=1,2,3,\cdots\cdots$. ($X_n\xrightarrow{P}X$により, $\min\{\cdots\}$中の集合は空ではない.)

すると$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$かつ$\forall k\in\mathbb{N}, n(k)<n(k+1)$である. さらに$\varepsilon\in(0,\infty)$に対し, $2^{-N}\leqq\varepsilon$となる$N\in\mathbb{N}$をとれば, $\forall k\geqq N$, $2^{-k}\leqq2^{-N}\leqq\varepsilon$, 従って$\{|X_{n(k)}-X|\geqq\varepsilon\}\subset\{|X_{n(k)}-X|\geqq2^{-k}\}$より

$$\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geqq\varepsilon]\leqq\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geqq2^{-k}]\leqq2^{-k}$$

となるので

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geqq\varepsilon]\leqq N+\sum_{k=N}^{\infty}2^{-k}<\infty.$$

ゆえに $X_{n(k)}\xrightarrow{BC}X.$ ■

Thm 5.3の証明

(1) $X_n\xrightarrow{BC}X$の仮定を$\varepsilon=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$, として用いれば, Borel-Cantelliの第1補題(Thm4.19-(1))により

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\Omega_k]=1$, ただし$\Omega_k:=\liminf_{n\to\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{k}\}$.

すると, $\Omega_0:=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$とおけば測度$\mathbb{P}$の劣加法性により

$$\mathbb{P}[\Omega_0^c]=\mathbb{P}\Big[\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k^c\Big]\underset{\text{劣加法性}}{\leqq}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[\Omega_k^c]=0$$

であるので $\mathbb{P}[\Omega_0]=1-\mathbb{P}[\Omega_0^c]=1.$

さて, そこで$\omega\in\Omega_0$とするとき, $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$であることを示せば$X_n\xrightarrow{a.s.}X$が得られたことになる. $\varepsilon\in(0,\infty)$とし, $N\in\mathbb{N}$を$\frac{1}{N}<\varepsilon$となるように取る. $\omega\in\Omega_N=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{N}\}$であるので, $\exists k(\omega)\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq k(\omega)$, $\omega\in\{|X_n-X|<\frac{1}{N}\}$, 従って$|X_n(\omega)-X(\omega)|<\frac{1}{N}<\varepsilon$. $\therefore\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$.

(2) $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. $X_n\xrightarrow{a.s.}X$より$\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geqq\varepsilon\}}\xrightarrow{a.s.}0$であり, $0\leqq\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geqq\varepsilon\}}\leqq1$, $\mathbb{E}[1]=1<\infty$であるので, Lebesgueの収束定理(DCT, Thm 1.25)とProp1.28により

$$\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geqq\varepsilon\}}]\xrightarrow[DCT]{n\to\infty}\mathbb{E}[0]=0.$$

よって $X_n\xrightarrow{P}X$.

(3) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$は有界連続とする. 背理法で証明するために, $\{\mathbb{E}[f(X_n)]\}_{n=1}^{\infty}$が$\mathbb{E}[f(X)]$に収束しないと仮定する. すると

$\exists\varepsilon\in(0,\infty)$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n\geqq N$, $|\mathbb{E}[f(X_n)]-\mathbb{E}[f(X)]|\geqq\varepsilon$.

そこで$n(0):=0$とおけば, 狭義単調増加列$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を$k=1,2,3,\cdots$に対し帰納的に次で定めることができる:

$n(k):=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n>n(k-1),\ |\mathbb{E}[f(X_n)]-\mathbb{E}[f(X)]|\geqq\varepsilon\}$.

さて, 仮定$X_n\xrightarrow{P}X$より$X_{n(k)}\xrightarrow{P}X$でもあり, するとLemma5.4より$\exists\{k(l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k(l))}\xrightarrow{BC}X$. そこで(1)より$X_{n(k(l))}\xrightarrow{a.s.}X$, 従ってfの連続性により容易に$f(X_{n(k(l))})\xrightarrow{a.s.}f(X)$が分かり, またfの有界性により$\forall l\in\mathbb{N}$,

$|f(X_{n(k(l))})|\leqq\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$, $\mathbb{E}[\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|]=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|<\infty$

であるので Lebesgueの収束定理(DCT, Thm1.25)と Prop1.28 により $\mathbb{E}[f(X_{n(k(\ell))})] \xrightarrow[\text{DCT}]{\ell\to\infty} \mathbb{E}[f(X)]$. これは $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ の定め方より $\forall k\in\mathbb{N},\ |\mathbb{E}[f(X_{n(k)})]-\mathbb{E}[f(X)]|\geqq\varepsilon$ であったことに反し, 矛盾である. よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$ であることになり, fは任意であったので $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

(4) $\varepsilon\in(0,\infty)$とすると $\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geqq\varepsilon\}}\leqq|X_n-X|^p\cdot\varepsilon^{-p}$ なので両辺の$\mathbb{E}[\cdots]$をとれば $\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]\leqq\varepsilon^{-p}\mathbb{E}[|X_n-X|^p]\xrightarrow{n\to\infty}0$. よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=0$ となるので, $X_n\xrightarrow{P}X$. ■

Thm5.5 $d\in\mathbb{N}$とし, $X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$は d-dim. r.v.s とする. このとき:
$X_n\xrightarrow{P}X \iff \forall\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$.

☺ ($\Longrightarrow$) $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ は狭義単調増加とすると, 仮定 $X_n\xrightarrow{P}X$ より $X_{n(k)}\xrightarrow{P}X$ であり, Lemma 5.4 より
$\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{BC}X$.
すると Thm 5.3-(1) より $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$.
($\Longleftarrow$) $\varepsilon\in(0,\infty)$とし $\{\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]\}_{n=1}^{\infty}$ が0に収束しないと仮定する. このとき Thm 5.3-(3)の証明と同様にして,
$\exists\delta\in(0,\infty), \exists\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加,
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geqq\varepsilon]\geqq\delta. \quad\cdots\cdots(5.1)$$
するとさらに仮定の条件から $\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$ となり, 従って Thm5.3-(2)より $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{P}X$ であるので $\lim_{\ell\to\infty}\mathbb{P}[|X_{n(k(\ell))}-X|\geqq\varepsilon]=0$. これは(5.1)に反し矛盾であるので, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=0$が分かり, $X_n\xrightarrow{P}X$. ■

系5.6 $d\in\mathbb{N}$とし, $X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$は d-dim. r.v.s, また $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ は連続であるとする. このとき:
(1) $X_n\xrightarrow{a.s.}X \Longrightarrow f(X_n)\xrightarrow{a.s.}f(X)$.
(2) $X_n\xrightarrow{P}X \Longrightarrow f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)$.
(3) $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X \Longrightarrow f(X_n)\xrightarrow{\mathcal{L}}f(X)$.

☺ (1) fの連続性により明らか.
(2) Thm5.5より, $\forall\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加 に対し, $\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$, 従って(1)より $f(X_{n(k(\ell))})\xrightarrow{a.s.}f(X)$ となるので, 再び Thm5.5を適用することで $f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)$ が従う.

(3) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$は有界連続とする. このとき $g\circ f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$は有界連続であるので $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ により,
$\mathbb{E}[g(f(X_n))]=\mathbb{E}[(g\circ f)(X_n)]\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[(g\circ f)(X)]=\mathbb{E}[g(f(X))]$.
よって $f(X_n)\xrightarrow{\mathcal{L}}f(X)$. ■

注意5.7 Thm5.3-(1),(2),(3),(4)の"$\Longrightarrow$"について, 逆の"$\Longleftarrow$"は一般には成立しない. (☺ Example3.54)

§6. 大数の法則

Def.6.1 (独立同分布(i.i.d.)) $d\in\mathbb{N}$, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$とし, $\{X_n\}_{n=1}^{N}$は d-dim. r.v.s とする. このとき:
$\{X_n\}_{n=1}^{N}$: 独立同分布(i.i.d., independent and identically distributed)
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{X_n\}_{n=1}^{N}$は独立で, $\forall n\in\mathbb{N}, n\leqq N$, に対し $\mathcal{L}(X_n)=\mathcal{L}(X_1)$.

● $d\in\mathbb{N}$, μ: $\mathbb{R}^d$上の分布
$\xRightarrow{\text{Thm4.17}}$ $\exists(\Omega^\mu,\mathcal{F}^\mu,\mathbb{P}^\mu)$: 確率空間,
$\exists\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: $(\Omega^\mu,\mathcal{F}^\mu,\mathbb{P}^\mu)$上で定義されたi.i.d. d-dim. r.v.s, $X_1\sim\mu$.

Thm6.2 (大数の弱法則(WLLN, weak law of large numbers)) $m\in\mathbb{R}$とし, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$は独立で $\forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n]=m$, かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{var}(X_n)<\infty$ と仮定する. このとき
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}m. \quad\cdots\cdots(6.1)$$
特に, 任意のi.i.d. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$に対し(6.1)が成り立つ.

☺ $\varepsilon\in(0,\infty)$とし, $n\in\mathbb{N}$, $S_n:=\sum_{k=1}^{n}X_k$ とする. このとき $\mathbb{E}[S_n]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k]=nm$ であることに注意すると,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqq\varepsilon\right] &\underset{\text{Thm5.3-(4)の証明}}{\leqq}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|^2\right]=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\mathbb{E}[|S_n-nm|^2]\\ &=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\mathrm{var}(S_n)\underset{\text{Prop4.14-(2)}}{=}\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{var}(X_k)\\ &\leqq\frac{1}{\varepsilon^2n}\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{var}(X_k)\xrightarrow{n\to\infty}0. \quad\cdots\cdots(6.2)\end{aligned}$$
よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqq\varepsilon\right]=0$であるので, $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}m$.
$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$がi.i.d.ならば, 系2.10により $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]$, $\mathrm{var}(X_n)=\mathrm{var}(X_1)$ なので, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{var}(X_n)=\mathrm{var}(X_1)<\infty$ であり, よって(6.1)が $m:=\mathbb{E}[X_1]$ で成り立つ. ■

12月3日
ここまで