学籍番号：　　　　　　　　**氏名：**

演習問題 $4\frac{1}{2}$（2015 年 11 月 11 日）

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．

演習 4.4. $c_n := (-1)^n$ で定義される数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が 0 に収束しないことを，数列の収束の定義に基づいて示せ．

演習 4.5. $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ で定義される数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が Cauchy 列でないことを，Cauchy 列の定義に基づいて示せ．

演習 4.6. (1) $p > 0, n \in \mathbb{N}$ とする．このとき次の不等式が成り立つことを示せ：

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^p} \leq 2^{(1-p)n}.$$

(2) $p > 1$ のとき級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

が収束すること（すなわち極限 $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^p} \in \mathbb{R}$ が存在すること）を示せ．