

学籍番号:

氏名:

演習問題 8 (2015 年 12 月 16 日)

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 数学的に厳密な議論を行うこと. 厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない.

演習 8.1. 次の関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が 1 において連続でないことを定義に基づいて示せ:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

演習 8.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $g_n(x) := \frac{n}{1+nx}$ で定める.

(1) 任意の $x \in [1, \infty)$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \frac{1}{x}$ であることを示せ.

(2) $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) := \frac{1}{x}$ で定める. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[1, \infty)$ 上で一様収束することを示せ.

演習 8.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $h_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める：

$$h_n(x) := \begin{cases} 2n^2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 4n - 2n^2x & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

- (1) 任意の $x \in [0, 2]$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$ であることを示せ.
- (2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に $[0, 2]$ 上で一様収束しないことを示せ.