解析学 VII 補足ノート・その 1
（2016 年 12 月 13 日配布）

定理 (定理 3.14 への補足)**.** $k \in \mathbb{N}$, μ を $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の測度とし，任意の $\mathbb{R}^k$ のコンパクト部分集合 K に対し $\mu(K) < \infty$ と仮定する．このとき任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ に対し

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) \mid U \text{ は } \mathbb{R}^k \text{ の開集合，} A \subset U\} &(3.23)\\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ はコンパクト}\}. &(3.24)\end{aligned}$$

証明. まず $\mu(\mathbb{R}^k) < \infty$ と仮定する．$\mathbb{R}^k$ の部分集合からなる集合族 $\mathcal{A}$ を次で定める：

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset \mathbb{R}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon \in (0,\infty) \text{ に対し，} \mathbb{R}^k \text{ の開集合 } U \text{ と } \mathbb{R}^k \text{ の} \\ \text{閉集合 } F \text{ が存在して } F \subset A \subset U \text{ かつ } \mu(U \setminus F) < \varepsilon \end{array} \right\}. \tag{3.A}$$

$\mathcal{A}$ が $\mathbb{R}^k$ の閉集合を全て含む $\mathbb{R}^k$ の σ-加法族であることを示そう．

$x \in \mathbb{R}^k$ と $r \in (0,\infty)$ に対し $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^k \mid |x-y| < r\}$ と定める．F を $\mathbb{R}^k$ の閉集合とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $U_n := \bigcup_{x \in F} B(x, 1/n)$ とおく．すると任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し U_n は $\mathbb{R}^k$ の開集合かつ $F \subset U_{n+1} \subset U_n$ であり，従って特に $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ である．他方 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ を任意に取ると，任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，$n \in \mathbb{N}$ を $n \geq 1/\varepsilon$ となるように取れば $y \in U_n$ より $x \in F$ が存在して $y \in B(x, 1/n) \subset B(x, \varepsilon)$, すると $|x-y| < \varepsilon$ となるので $x \in F \cap B(y, \varepsilon)$ となり，$F \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset$, ゆえに $y \in \overline{F} = F$ であるので $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset F$（$F$ が $\mathbb{R}^k$ の閉集合であるとの仮定から $\overline{F} = F$ であることに注意）．よって $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, 従って $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n)$ であり，これと $\mu(F) \leq \mu(\mathbb{R}^k) < \infty$ であることから，任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(U_n \setminus F) = \mu(U_n) - \mu(F) < \varepsilon$ かつ $F \subset F \subset U_n$ となり，U_n は $\mathbb{R}^k$ の開集合かつ F は $\mathbb{R}^k$ の閉集合であるのでこれは $F \in \mathcal{A}$ を意味する．よって $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^k$ の閉集合を全て含む．

$\emptyset$ は $\mathbb{R}^k$ の閉集合なので前段落の結果により $\emptyset \in \mathcal{A}$ である．次に $A \in \mathcal{A}$ とすると任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し，この ε に対する (3.A) のような $U, F \subset \mathbb{R}^k$ を取れば F^c は $\mathbb{R}^k$ の開集合，U^c は $\mathbb{R}^k$ の閉集合で $U^c \subset A^c \subset F^c$ を満たし，さらに $F^c \setminus U^c = U \setminus F$ なので $\mu(F^c \setminus U^c) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon$, よって $A^c \in \mathcal{A}$ である．最後に $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ とし，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ を示すために $\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取る．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n \in \mathcal{A}$ なので $\mathbb{R}^k$ の開集合 U_n と $\mathbb{R}^k$ の閉集合 F_n を $F_n \subset A_n \subset U_n$ かつ $\mu(U_n \setminus F_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$ となるように取ることができ，すると $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ かつ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.B}$$

ここでさらに $\infty > \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) = \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n} F_j\bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu\bigl(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\bigr)$ であるので $\ell \in \mathbb{N}$ を $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) \leq \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\ell} F_n\bigr) + \varepsilon/2$ となるように取ることができ，これと (3.B) から

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\ell} F_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\ell} F_n\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\ell} F_n\right) < \varepsilon,\end{aligned}$$

かつここで現れた集合のうち $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ は $\mathbb{R}^k$ の開集合，$\bigcup_{n=1}^{\ell} F_n$ は $\mathbb{R}^k$ の閉集合であり $\bigcup_{n=1}^{\ell} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ を満たす．従って $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ となり，ゆえに $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^k$ の σ-加法族である．

以上により $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^k$ の σ-加法族であり，$\mathbb{R}^k$ の閉集合を全て含み，従って $\mathbb{R}^k$ の開集合も全て含むので Borel σ-加法族の定義により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{A}$ となるが，これは次が成り立つことを意味する：

$$\text{(3.23) および (3.24) で「コンパクト」を「}\mathbb{R}^k\text{ の閉集合」で置き換えたものが，}\mu(\mathbb{R}^k) < \infty\text{ であるような }\big(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\big)\text{ 上の測度 }\mu\text{ に対して成り立つ．} \tag{3.C}$$

さて，(3.C) を用いて $\mu(\mathbb{R}^k) = \infty$ かもしれない一般の場合に (3.23) と (3.24) が成り立つことを示そう．$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ とする．$\varepsilon \in (0, \infty)$ を任意に取り，さらに $n \in \mathbb{N}$ とし $n = 1$ のときは $A_1 := A \cap B(0, 1)$, また $n \geq 2$ のときは $A_n := A \cap B(0, n) \setminus B(0, n-1)$ とおく（もちろんここで 0 は $\mathbb{R}^k$ の零元 $(0, \dots, 0)$ を表す）．$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \ni B \mapsto \mu\big(B \cap B(0, n)\big) =: \mu_n(B)$ で定義される $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ 上の関数 μ_n は容易に確かめられるように $\big(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\big)$ 上の測度であり，また $\mu_n(\mathbb{R}^k) = \mu\big(B(0, n)\big) < \infty$ を満たすので，(3.C) により μ_n に対しては (3.23) が成り立ち，よって $\mathbb{R}^k$ の開集合 U_n が存在して

$$A_n \subset U_n \qquad \text{かつ} \qquad \mu\big(U_n \cap B(0, n)\big) = \mu_n(U_n) < \mu_n(A_n) + 2^{-n}\varepsilon = \mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

すると $U := \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(U_n \cap B(0, n)\big)$ で定義される U は $\mathbb{R}^k$ の開集合で $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$ を満たし，さらに μ の可算劣加法性と可算加法性により

$$\mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(U_n \cap B(0, n)\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\big(\mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon\big) = \mu(A) + \varepsilon$$

となるので，$\varepsilon \in (0, \infty)$ が任意であったことと合わせて (3.23) が従う．

他方，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \ni B \mapsto \mu\big(B \cap \overline{B(0, n)}\big) =: \nu_n(B)$ で定義される $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ 上の関数 ν_n は上記の μ_n と同様に $\big(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\big)$ 上の測度で $\nu_n(\mathbb{R}^k) = \mu\big(\overline{B(0, n)}\big) < \infty$ を満たすので，(3.C) により (3.24) で「コンパクト」を「$\mathbb{R}^k$ の閉集合」で置き換えたものが ν_n に対して成り立ち，よって $\mathbb{R}^k$ の閉集合 F_n が存在して

$$F_n \subset A \qquad \text{かつ} \qquad \mu\big(F_n \cap \overline{B(0, n)}\big) = \nu_n(F_n) > \nu_n(A) - 2^{-n} = \mu\big(A \cap \overline{B(0, n)}\big) - 2^{-n}.$$

するとこの不等式の両辺の $\limsup_{n\to\infty}$ を取ることにより

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\big(F_n \cap \overline{B(0, n)}\big) \geq \lim_{n\to\infty}\Big(\mu\big(A \cap \overline{B(0, n)}\big) - 2^{-n}\Big) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(A \cap \overline{B(0, n)}\big)\right) = \mu(A)$$

が得られ，さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $F_n \cap \overline{B(0, n)} \subset F_n \subset A$ かつ $F_n \cap \overline{B(0, n)}$ がコンパクトであることに注意すると

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\big(F_n \cap \overline{B(0, n)}\big) \leq \sup_{n\geq 1} \mu\big(F_n \cap \overline{B(0, n)}\big) \leq \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K\text{ はコンパクト}\} \leq \mu(A)$$

となるので，この 2 つの不等式を合わせて (3.24) を得る． □