解析学 VII 補足ノート・その 2
（2017 年 1 月 23 日配布）

H を（任意の）$\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を H の内積とする．

定理 (定理 4.18 への補足 1)**.** H は無限次元かつ可分 $\Longleftrightarrow$ H は完全正規直交系 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つ．

証明. ($\Longleftarrow$) H が完全正規直交系 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持つとする．$n \in \mathbb{N}$ を任意に取る．$\{u_k\}_{k=1}^{n}$ は H における正規直交系であるので，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ に対し，$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0$ ならば

$$0 = \|c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} c_k \overline{c_\ell}(u_k, u_\ell) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

従って $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる．すなわち $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ は 1 次独立である．ここで $n \in \mathbb{N}$ は任意であるので，H は無限次元である．

次に H が可分であることを示すために，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$P_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \right\}, \tag{4.A}$$

$$P_{\mathbb{Q},n} := \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\} \tag{4.B}$$

（ただし $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$）とおき，

$$P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \qquad P_{\mathbb{Q}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\mathbb{Q},n}$$

と定める．このとき $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \ni a + ib \mapsto (a, b) \in \mathbb{Q}^2$ は明らかに全単射であり，$\mathbb{Q}$ は可算集合であるのでその直積集合 $\mathbb{Q}^2$ は可算，従って $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ も可算である．また各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\{u_k\}_{k=1}^{n}$ は H における正規直交系なので特に 1 次独立であり，従って写像

$$P_{\mathbb{Q},n} \ni \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \mapsto (c_1, \ldots, c_n) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$$

は全単射，かつ可算集合 $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ の有限直積 $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$ は可算なので $P_{\mathbb{Q},n}$ も可算である．すると可算集合の可算和である $P_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\mathbb{Q},n}$ も可算集合であることになる．

$P_{\mathbb{Q}}$ が H において稠密であることを示そう．$x \in H$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ を任意に取る．$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は H における完全正規直交系であるので，定理 4.18 の条件 (ii) により P は H において稠密であり，よってある $y \in P$ が存在して $\|x - y\| < \varepsilon/2$ となるが，さらに $y \in P$ よりある $n \in \mathbb{N}$ と $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ が存在して $y = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$ となる．ここで明らかに $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}$ において稠密であるので，各 $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $b_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ が存在して $|c_k - b_k| < \varepsilon/(2\sqrt{n})$ となり，このとき $z := \sum_{k=1}^{n} b_k u_k$ とおくと

$$\|y - z\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (c_k - b_k) u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k - b_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \text{すなわち} \quad \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるので

$$\|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

であり，また $z = \sum_{k=1}^{n} b_k u_k \in P_{\mathbb{Q}}$. よって $P_{\mathbb{Q}}$ は H において稠密であり，$P_{\mathbb{Q}}$ は可算集合であるので，H は可分である．

($\Longrightarrow$) H が無限次元かつ可分と仮定する．H が可分であるとの仮定から，H の（高々）可算な部分集合 A で H において稠密なものが存在する．まず A が可算無限集合であることに注意する．実際，A が有限と仮定すると，A は $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ と 1 点集合の有限和で表せ，H は距離空間なので各 $x \in A$ に対し 1 点集合 $\{x\}$ は H の閉集合，従ってその有限和 $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ も H の閉集合であるので $H = \overline{A} = A$, すなわち H は有限集合ということになり，H が $\mathbb{C}$ 上の（0 以外の元を持つ）ベクトル空間，従って無限集合であることに矛盾する．よって A は可算無限集合である．

$B := A \setminus \{0\}$ とおく．このとき B は H において稠密である．実際，$x \in H \setminus \{0\}$ と $\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取るとき，A が H において稠密であることから $y \in A$ で $\|x - y\| < \min\{\varepsilon, \|x\|/2\}$ を満たすものが存在し，このとき $\|y\| \geq \|x\| - \|x - y\| > \|x\| - \|x\|/2 = \|x\|/2 > 0$, 従って $y \neq 0$ なので $y \in A \setminus \{0\} = B$ であり，かつ $\|x - y\| < \varepsilon$ である．よって $x \in \overline{B}$. またこのとき $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| < \|x\|/2 + \|x\| = 3\|x\|/2$ も成り立つので，特に x として最初から $\|x\| = 2\varepsilon/3$ であるようなものを取っておく（$z \in H \setminus \{0\}$ を 1 つ取り $x := (2\varepsilon/3)\|z\|^{-1}z$ とおけばよい）ことにより，$y \in B$ かつ $\|0 - y\| = \|y\| < 3\|x\|/2 = \varepsilon$ を満たす $y \in B$ が存在することも分かり，よって $0 \in \overline{B}$. ゆえに B は H において稠密である．

A は可算無限なので $B = A \setminus \{0\}$ も可算無限であり，そこで $\mathbb{N}$ から B への全単射 $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in B$ を 1 つ取ることにより B の元全体を点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の形に表しておく．$n \in \mathbb{N}$ とし，$\{u_k\}_{k=1}^{n} \subset H$ が次を満たすと仮定する：

$$\{u_k\}_{k=1}^{n} \text{ は } H \text{ における正規直交系であり，} P_n \text{ を (4.A) で定めると } x_1, \ldots, x_n \in P_n. \tag{GS$_n$}$$

このとき，$u_{n+1} \in H$ を適切に取ることで，$\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ が $(\mathrm{GS})_{n+1}$ を満たすようにできることを示そう．このために，線型代数学でも学習した **Gram–Schmidt の正規直交化法**を用いる．まず，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $x_k \in P_n$（すなわち $B \subset P_n$）と仮定すると，定理 4.14 への注意で述べたように P_n は H の閉部分空間であるので $H = \overline{B} \subset P_n$, つまり $H = P_n$ となり，特に H は n 次元ベクトル空間であることになり H が無限次元であることに矛盾する．よってある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $x_k \notin P_n$ であり，そこで $\ell_n \in \mathbb{N}$ を $\ell_n := \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \notin P_n\}$ により定めることができる．$(\mathrm{GS})_n$ より $x_1, \ldots, x_n \in P_n$ であったので，$\ell_n \geq n + 1$ である．さて，$v_{n+1}, u_{n+1} \in H$ を次で定めよう：

$$v_{n+1} := x_{\ell_n} - \sum_{k=1}^{n} (x_{\ell_n}, u_k) u_k, \qquad u_{n+1} := \|v_{n+1}\|^{-1} v_{n+1}. \tag{4.C}$$

ここで ℓ_n の定め方より $x_{\ell_n} \notin P_n$, 従って $v_{n+1} \neq 0$ であり，特に $\|v_{n+1}\| \neq 0$ である（ので，$u_{n+1} := \|v_{n+1}\|^{-1} v_{n+1}$ により $u_{n+1} \in H$ を定めることができる）ことに注意する．すると $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ が H における正規直交系であることから任意の $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ に対し

$$\begin{aligned}(u_{n+1}, u_\ell) = \|v_{n+1}\|^{-1}(v_{n+1}, u_\ell) &= \|v_{n+1}\|^{-1}\left((x_{\ell_n}, u_\ell) - \sum_{k=1}^{n} (x_{\ell_n}, u_k) \cdot (u_k, u_\ell)\right) \\ &= \|v_{n+1}\|^{-1}\Big((x_{\ell_n}, u_\ell) - (x_{\ell_n}, u_\ell) \cdot 1\Big) = 0\end{aligned}$$

であり，また $\|u_{n+1}\| = \|v_{n+1}\|^{-1}\|v_{n+1}\| = 1$ であるので，これらと $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ が H における正規直交系であることを合わせると，$\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ も H における正規直交系であることになる．そしてこの $\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ を用いて P_{n+1} を (4.A) で定めると，明らかに $P_n \subset P_{n+1}$ なのでこれと $(\mathrm{GS})_n$ より $x_1, \ldots, x_n \in P_{n+1}$ である．x_{n+1} については，$\ell_n \neq n+1$ ならば ℓ_n の定義により $x_{n+1} \in P_n \subset P_{n+1}$ であり，他方 $\ell_n = n + 1$ ならば (4.C) により $x_{n+1} = \|v_{n+1}\| u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}, u_k) u_k \in P_{n+1}$ である．以上で，$\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ が $(\mathrm{GS})_{n+1}$ を満たすように $u_{n+1} \in H$ を構成できることが分かった．

さて，$B = A \setminus \{0\}$ より $x_1 \neq 0$ であることに注意すると，$(\mathrm{GS})_1$ を満たすような $\{u_k\}_{k=1}^{1}$ を $u_1 := \|x_1\|^{-1} x_1$ により定めることができる．そこであとは前段落の議論を帰納的に順次適用することにより，H における正規直交系 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ が $(\mathrm{GS})_n$ を満たすものが得られる．すると $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in P_n \subset P$ を満たすので，$B \subset P$, 従って $H = \overline{B} \subset \overline{P} \subset H$ となり，ゆえに $\overline{P} = H$, すなわち P は H において稠密である．これは $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 4.18 の条件 (ii) を満たすことを意味するので，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は H における完全正規直交系である． $\square$