解析学 VII 補足ノート・その 3
（2017 年 1 月 30 日配布）

定理 (定理 9.2-(f) への補足：積分記号化の微分). $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$a, b \in [-\infty, \infty]$ は $a < b$ を満たすとする．$f : X \times (a, b) \to \mathbb{C}$ とし，任意の $t \in (a, b)$ に対し $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, かつ任意の $x \in X$ に対し $f(x, \cdot) : (a, b) \to \mathbb{C}$ は微分可能とする．さらに $\mathcal{M}$-可測で μ-可積分な関数 $g : X \to [0, \infty]$ が存在して任意の $(x, t) \in X \times (a, b)$ に対し $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$ と仮定する．このとき $\int_X f(x, \cdot)\, d\mu(x) : (a, b) \to \mathbb{C}$ は微分可能であり，任意の $t \in (a, b)$ に対し $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ かつ

$$\frac{d}{dt}\int_X f(x, t)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x). \tag{9.A}$$

証明. $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ を $F(t) := \int_X f(x, t)\, d\mu(x)$ で定める．F が (a, b) の任意の点において微分可能であることを示すため，$t \in (a, b)$ を任意に取る．f の第 2 変数に関する微分 $\frac{\partial f}{\partial t}$ の定義により任意の $x \in X$ に対し

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x, t + n^{-1}) - f(x, t)}{n^{-1}}$$

であり，$f(\cdot, t + n^{-1})$ および $f(\cdot, t)$ は $\mathcal{M}$-可測なので $\frac{f(\cdot, t+n^{-1}) - f(\cdot, t)}{n^{-1}}$ も $\mathcal{M}$-可測，従ってその $n \to \infty$ のときの各点収束極限である $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ も $\mathcal{M}$-可測である．するとさらに $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\right| \leq g$ との仮定から

$$\int_X \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| d\mu(x) \leq \int_X g(x)\, d\mu(x) < \infty$$

となり，よって $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ である．そこで $G(t) := \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$ とおく．

さて，$\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ で，$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $t + h_n \in (a, b)$ であるようなものを任意に取る．このとき

$$\begin{aligned}\frac{F(t + h_n) - F(t)}{h_n} &= \frac{1}{h_n}\left(\int_X f(x, t + h_n)\, d\mu(x) - \int_X f(x, t)\, d\mu(x)\right) \\ &= \int_X \frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n}\, d\mu(x)\end{aligned} \tag{9.B}$$

であるが，ここで (9.B) の右辺の被積分関数について，f を実部と虚部に分けて $f = u + iv$ と表し u と v それぞれに平均値の定理を用いると，任意の $x \in X$ に対しある $\theta_1(x, t, h_n), \theta_2(x, t, h_n) \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n}\right| &= \left|\frac{u(x, t + h_n) - u(x, t)}{h_n} + i\,\frac{v(x, t + h_n) - v(x, t)}{h_n}\right| \\ &= \left|\frac{\partial u}{\partial t}\big(x, t + \theta_1(x, t, h_n)h_n\big) + i\,\frac{\partial v}{\partial t}\big(x, t + \theta_2(x, t, h_n)h_n\big)\right| \\ &\leq \left|\frac{\partial u}{\partial t}\big(x, t + \theta_1(x, t, h_n)h_n\big)\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\big(x, t + \theta_2(x, t, h_n)h_n\big)\right| \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial t}\big(x, t + \theta_1(x, t, h_n)h_n\big)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\big(x, t + \theta_2(x, t, h_n)h_n\big)\right| \leq 2g(x).\end{aligned} \tag{9.C}$$

$\int_X 2g(x)\, d\mu(x) = 2\int_X g(x)\, d\mu(x) < \infty$, かつ任意の $x \in X$ に対し $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x, t+h_n) - f(x, t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ であるので，(9.C) により Lebesgue の収束定理が (9.B) の右辺に適用できることが分かり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t + h_n) - F(t)}{h_n} = \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x, t + h_n) - f(x, t)}{h_n}\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x) = G(t) \tag{9.D}$$

が得られる．

前段落の議論から，$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $t + h_n \in (a, b)$ であるような任意の $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して (9.D) が成り立つことが分かった．これを用いて，関数 F が t において微分可能で $F'(t) = G(t)$ であること，すなわち

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = G(t) \tag{9.E}$$

が成り立つことを背理法により証明しよう．(9.E) が成り立たないと仮定すると，(9.E) の収束の定義（の否定）により，ある $\varepsilon \in (0, \infty)$ が存在して，任意の $\delta \in (0, \infty)$ に対し

$$\text{ある } h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \text{ が存在して} \quad t + h \in (a, b) \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - G(t) \right| \geq \varepsilon. \tag{9.F}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\delta := n^{-1}$ に対する (9.F) のような h を取りそれを h_n とおく．すると任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $t + h_n \in (a, b)$ かつ $0 < |h_n| < n^{-1}$ であり，特に $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ かつ $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. よってこの $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して前段落の議論により (9.D) すなわち $\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = G(t)$ が成り立つことになるが，これは (9.F) により任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left| \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} - G(t) \right| \geq \varepsilon$$

であったことに矛盾する．よって (9.E) が成り立ち，これは

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x, t)\, d\mu(x) = F'(t) = G(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu(x)$$

を意味する． □