第 1 回レポート

締め切り：**2016 年 12 月 22 日（木）17:00**

提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 1.1～1.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う.**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する.（つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである.）

問題 1.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{M}$-可測とし，$p, r \in (0, \infty]$ は $p < r$ を満たすとする．このとき次が成り立つことを示せ（ただし $r = \infty$ のときは $(r - p)/(pr) := 1/p$ と定める）：

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r \cdot \mu(X)^{(r-p)/(pr)}.$$

（これより特に「$\mu(X) < \infty$ であるとき，$p, r \in (0, \infty]$, $p < r$ ならば $\mathcal{L}^r(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$」が分かる.）

問題 1.2 (定理 3.11 の $p = \infty$ の場合の証明)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ を L^{∞}-ノルムに関する Cauchy 列とする．各 $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $B_{m,n} \in \mathcal{M}$ を

$$B_{m,n} := \left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_{\infty}\right\}$$

で定めると L^{∞}-ノルムの性質から $\mu(B_{m,n}) = 0$ であり，そこで $B := \bigcup_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}$ とおくと μ の可算劣加法性により $\mu(B) = 0$ である．また任意の $x \in X \setminus B$ と任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}$$

が成り立つ（以上は証明不要）.

(1) 任意の $x \in X$ に対し複素数列 $\left\{f_n(x)\mathbf{1}_{X \setminus B}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ において収束することを示せ.

(2) $\mathcal{M}$-可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$ を $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathbf{1}_{X \setminus B}(x)$ で定める（f が $\mathcal{M}$-可測であることは証明不要）．このとき $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$ であることを示せ.

問題 1.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$s : X \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{M}$-**単関数**，すなわち像 $s(X)$ が有限集合であるような $\mathcal{M}$-可測関数とする．また $p \in (0, \infty)$ とする．このとき $\mu\big(s^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\big) < \infty$ であるためには $s \in \mathcal{L}^p(\mu)$ となることが必要十分であることを示せ.