第 2 回レポート
締め切り：**2017 年 1 月 19 日（木）17:00**
提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 2.1〜2.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う．**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する．(つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである．)

問題 2.1. $C\big([0,1]\big) := \big\{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{C},\ f \text{ は連続} \big\}$ とおき，$f, g \in C\big([0,1]\big)$ に対し $(f, g) \in \mathbb{C}$ を

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

（積分は Riemann 積分，もしくは（同じことだが）$[0,1]$ 上の Lebesgue 測度に関する積分とする）で定める．すると $(\cdot,\cdot)$ は $C\big([0,1]\big)$ 上のエルミート双線型形式であり（このことは証明不要），そこでさらに $f \in C\big([0,1]\big)$ に対し $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ と定める．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $(\cdot,\cdot)$ が $C\big([0,1]\big)$ 上の内積であること，すなわち，$f \in C\big([0,1]\big)$ が $\|f\| = 0$ を満たすならば，（$[0,1]$ 上で恒等的に）$f = 0$ であることを示せ．(ヒント：背理法．ある $s \in [0,1]$ において $f(s) \neq 0$ と仮定し，f の連続性を用いて s のある十分小さい近傍での $|f|^2$ の積分が正であることを導け．)

(2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f_n \in C\big([0,1]\big)$ を次で定める：

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \big(x \le \frac{1}{2}\big), \\ 2n\big(x - \frac{1}{2}\big) & \big(\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\big), \\ 1 & \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le x \le 1\big). \end{cases}$$

このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（内積 $(\cdot,\cdot)$ から定まる $C\big([0,1]\big)$ 上の距離に関する）Cauchy 列であることを示せ．(ヒント：$\|f_n - f_m\|^2$ を具体的な積分として書き下してみよ．)

(3) **（やや難）** $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ を満たす $f \in C\big([0,1]\big)$ が存在しないことを示せ．

問題 2.2. H を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とし，$(\cdot,\cdot)$ をその内積とする．M を H の部分集合とし，M の H における閉包を $\overline{M}$ で表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$ であることを示せ．

(2) M が H の閉部分空間ならば $(M^{\perp})^{\perp} = M$ であることを示せ．(ヒント：定理 4.11-(a) を用いよ．)

(3) M が H の部分空間ならば $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$ であることを示せ．(ヒント：(1) と (2) を用いよ．)

問題 2.3. (X, d) を距離空間，M を X の部分集合とし，M は（距離 d を $M \times M$ に制限して得られる M 上の距離の下で）完備であると仮定する．M の X における閉包を $\overline{M}$ で表すものとする．$x \in \overline{M}$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $d(x, x_n) < 1/n$ を満たす $x_n \in M$ を取る（$x \in \overline{M}$ であることからそのような x_n は存在する）．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は M における Cauchy 列であることを示せ．

(2) M の完備性の仮定と (1) により，$y \in M$ が存在して $\lim_{n\to\infty} d(y, x_n) = 0$ となるが，このとき $x = y$ であることを示せ．(よって $x = y \in M$ であり，ここで $x \in \overline{M}$ は任意であったので，$\overline{M} \subset M$, すなわち M が X の閉集合であることが分かる)．