第3回レポート
締め切り：2017年1月31日（火）12:00
提出先：数学専攻事務室（理学部B棟4階B410号室）

以下の問題 3.1〜3.4 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う.**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する.（つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである.）

問題 3.1. 次の (1)〜(3) の $f \in L^1(T)$ に対し，f の Fourier 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds\right)e^{int}$$

を求めよ（ただし講義でも説明した通り，$L^1(T) := L^1\big((-\pi,\pi),(2\pi)^{-1}dt\big)$ である）：

(1)　$f(x) = \mathbf{1}_{[0,\pi)}(x)$　　(2)　$f(x) = (\pi - |x|)^+$　　(3)　$f(x) = |x|$

問題 3.2. $f \in L^1(T), N \in \mathbb{N}$ とする．周期的に拡張することで f を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の周期関数とみなすとき，任意の $t \in [-\pi,\pi]$ に対し次の (1), (2) が成り立つことを示せ：

$$(1)\qquad s_N(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\frac{\cos(Ns)-\cos\big((N+1)s\big)}{1-\cos s}\,ds.$$

$$(2)\qquad \sigma_N(f)(t) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\frac{1-\cos(Ns)}{1-\cos s}\,ds.$$

問題 3.3. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ の Borel σ-加法族とする．$a \in \mathbb{R}$ とし，$\delta_a : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ を次で定める：

$$\text{各 } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ に対し}\qquad \delta_a(A) := \mathbf{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & (a \in A), \\ 0 & (a \notin A). \end{cases}$$

(1) δ_a は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度であることを示せ．
(2) m を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Lebesgue 測度とする．δ_a と m は互いに特異であることを示せ．

問題 3.4. $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ に対し，次で定義される関数 $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を f の **Fourier 変換**という：

$$\text{各 } t \in \mathbb{R} \text{ に対し}\qquad \hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\,dx.$$

次の (1)〜(4) の $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ に対し，f の Fourier 変換（の $t \in \mathbb{R}$ における値）$\hat{f}(t)$ を求めよ：

(1) $f(x) = (1-|x|)^+$　(2) $f(x) = e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$　(3) $f(x) = e^{-|x|}$　(4) **（やや難）** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$