第 1 回レポート
締め切り：**2016 年 10 月 14 日（金）17:00**
提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 1.1〜1.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う.**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する.（つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである.）

問題 1.1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，S を集合，$f : X \to S$ とし，$\mathcal{A}_f \subset 2^S$ を

$$\mathcal{A}_f := \{A \subset S \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$$

で定める．このとき $\mathcal{A}_f$ は S の σ-加法族であることを示せ.

問題 1.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ とする.
(1) $B_1 := A_1$ とし，各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ とする．このとき

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$$

であることを示せ.
(2) 次の不等式が成り立つことを示せ（この性質を測度 μ の **（可算）劣加法性** という）：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

問題 1.3 (講義中の命題 1.9 の証明)**.** $d \in \mathbb{N}$ とし，$\mathcal{F}_d, \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ を次で定める：

$$\mathcal{F}_d := \bigl\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \bigm| \text{各 } k \in \{1, \ldots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ かつ } a_k \leq b_k\bigr\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} := \bigl\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \bigm| \text{各 } k \in \{1, \ldots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ かつ } a_k \leq b_k\bigr\} \cup \{\emptyset\}.$$

このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma\bigl(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\bigr)$ であることを，次の問に順次答えることにより証明せよ.
(1) $\sigma\bigl(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\bigr) \subset \sigma(\mathcal{F}_d)$ であることを示せ.
(2) $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示し，さらに $\sigma(\mathcal{F}_d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示せ.
(3) U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とし，$\mathcal{F}_U := \bigl\{I \in \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \bigm| I \subset U\bigr\}$ とおく．$U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_U} I$ であることを示せ.
(4) $\bigl\{U \subset \mathbb{R}^d \bigm| U \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ の開集合}\bigr\} \subset \sigma\bigl(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\bigr)$ を示し，さらに $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma\bigl(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\bigr)$ であることを示せ.