第2回レポート
締め切り：2016年11月7日（月）12:00（正午）
提出先：数学専攻事務室（理学部B棟4階B410号室）

以下の問題 2.1〜2.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う．**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する．(つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである．)

問題 2.1. X を可算集合，$\varphi : X \to [0,\infty]$ とし，$\mu_\varphi : 2^X \to [0,\infty]$ を次で定める：

$$\mu_\varphi(A) := \sum_{x\in A} \varphi(x), \quad A \subset X \qquad \text{（ただし } A = \emptyset \text{ のときは } \textstyle\sum_{x\in\emptyset}\varphi(x) := 0 \text{ と定める）}.$$

(1) **（やや難）** μ_φ は $(X, 2^X)$ 上の測度であることを示せ．

(2) **（易）** 任意の $f : X \to [0,\infty]$ は 2^X-可測であることを示せ．

(3) $f : X \to [0,\infty]$ とする．$\displaystyle\int_X f\,d\mu_\varphi = \sum_{x\in X} f(x)\varphi(x)$ が成り立つことを示せ．

((3) のヒント：X が有限のときは f を $f = \sum_{x\in X} f(x)\mathbf{1}_{\{x\}}$ と有限和の形に書けることから従う．X が可算無限のときは，全単射 $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ を取って f を $f_n := \sum_{k=1}^n f(x_k)\mathbf{1}_{\{x_k\}}$ で定まる非負関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ で近似し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\int_X f_n\,d\mu_\varphi$ を求めた後で単調収束定理を用いよ．)

問題 2.2. 次の (1)〜(3) の各場合について，実確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathrm{var}(X)$ を求めよ．

(1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0,1]$ の二項分布 $B(n,p)$ のとき．

(2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ の Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき．

(3) X の分布がパラメータ $\alpha \in [0,1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ のとき．

問題 2.3. 次の (1)〜(3) の各場合について，実確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathrm{var}(X)$ を求めよ．

(1) X の分布が $[a,b]$ 上の一様分布 $\mathrm{Unif}(a,b)$ のとき $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

(2) X の分布がパラメータ $\alpha \in (0,\infty)$ の指数分布 $\mathrm{Exp}(\alpha)$ のとき．

(3) X の分布がパラメータ $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ のガンマ分布 $\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$ のとき．