第3回レポート
締め切り：**2016年11月18日（金）12:00（正午）**
提出先：数学専攻事務室（理学部B棟4階B410号室）

以下の問題 3.1〜3.2 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う.**

なお最終的な成績評価にあたっては，期末試験の結果にレポートの評点を加える形で行い，期末試験だけでも良い成績を取ることが十分可能になるように配点する.（つまりレポートの提出は必須ではないが，確実に単位を取得する為には出した方がよい，ということである.）

問題 3.1. X, Y を実確率変数とし，$\{X, Y\}$ は独立，かつ $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ であるとする．このとき次の期待値を求めよ.

$$(1)\quad \mathbb{E}[\max\{X,Y\}] \qquad (2)\quad \mathbb{E}[\min\{X,Y\}] \qquad (3)\quad \mathbb{E}[\max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\}]$$

問題 3.2. X を実確率変数とし，その**特性関数** $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}], \qquad t \in \mathbb{R}$$

（ただし i は虚数単位を表すものとする）．このとき任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つことを示せ.

(1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0,1]$ の二項分布 $B(n,p)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = \bigl(1 + p(e^{it} - 1)\bigr)^n.$$

(2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ の Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = \exp\bigl(\lambda(e^{it} - 1)\bigr).$$

(3) X の分布がパラメータ $\alpha \in [0,1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{it}}.$$

(4) X の分布が $[-a,a]$ 上の一様分布 $\mathrm{Unif}(-a,a)$ のとき $(a \in (0,\infty))$,

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin at}{at} \qquad \left(\text{ただし } \frac{\sin 0}{0} := 1 \text{ と定める}\right).$$

注意. 問題 3.2 の解答に際しては，複素数値関数の積分に関する次の定義と事実に注意すること（講義ノートの 8.0 節も合わせて参照されたい）：

(1) $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$f : X \to \mathbb{C}$ とする．$\mathrm{Re}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ が共に（$\mathbb{R}$-値関数として）$\mathcal{M}$-可測であるとき，f は（$\mathbb{C}$-値関数として）$\mathcal{M}$-可測であるという.

(2) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$f : X \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{M}$-可測とする．$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ であるとき f は μ-可積分であるといい，そのとき $\int_X f\,d\mu := \int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu$ と定める.

(3) X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実確率変数とし，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は有界で $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測とする．このとき $f(X) := f \circ X : \Omega \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{F}$-可測で，講義中の**定理 2.10-(2) の等式** $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ **が成り立つ**．さらに X の分布が「§3 確率分布の例」に挙げた分布のいずれかに等しいとき，$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ **に定理 2.11-(2), 命題 2.14-(2) の等式が適用でき**，かつ後者の等式中の級数は絶対収束する．そこで $f(x) = e^{itx}$ の場合を考えることで $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ が計算できる.