確率論（担当：梶野）　2016 年度第 1 クォーター・神戸大学理学研究科数学専攻博士前期課程

レポート試験

締め切り：**2016 年 6 月 8 日（水）17:00**

提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題のうち，**必須問題（問題 1.1〜1.5）の全てと選択問題（問題 2.1〜2.3）のうちの 1 題もしくは 2 題**に解答し，レポートとして提出すること．

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること：

- **学籍番号，氏名を忘れずに記入すること．**
- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．**明らかに他者のレポートを写したと分かるレポートが発見された場合，写した者と写させた者，どちらのレポートも 0 点として取り扱う．**
- 以下で引用している「教科書」とは次の書籍である：
G. F. Lawler, *Random Walk and the Heat Equation*, American Mathematical Society, 2010.

1　必須問題：以下の問題 1.1〜1.5 の全てに解答せよ．

問題 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき次の不等式が成り立つことを示せ：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

（この性質を測度 μ の**（可算）劣加法性**という）．

以下の問題のために次の定義が必要である．

定義. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ とする．関数 f が次の性質

$$\text{「任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対し} \quad f^{-1}\big((a, \infty]\big) \in \mathcal{F}\text{」}$$

を満たすとき，f は **$\mathcal{F}$-可測**であるという．（$f^{-1}\big((a, \infty]\big) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\}$ に注意せよ．）

問題 1.2. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．
(1) $c \in [-\infty, \infty]$ とする．Ω 上で常に一定値 c を取る定数関数 $c\mathbf{1} : \Omega \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．
(2) $A \subset \Omega$ とし，A の**指示関数** (indicator function) $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & (\omega \in A), \\ 0 & (\omega \in \Omega \setminus A). \end{cases}$$

このとき，$\mathbf{1}_A$ が $\mathcal{F}$-可測であるためには $A \in \mathcal{F}$ であることが必要十分であることを示せ．

問題 1.3. $(\Omega, \mathcal{F})$ と $(S, \mathcal{B})$ を可測空間とし，写像 $X : \Omega \to S$ は次の性質

$$\text{「任意の } A \in \mathcal{B} \text{ に対し} \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\text{」}$$

を満たすとする．さらに関数 $f : S \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{B}$-可測であるとする．このとき合成写像 $f(X) := f \circ X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{F}$-可測であることを示せ．

問題 1.4. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ は C^2-級であるとする．このとき任意の $(a,b) \in U$ に対し次が成り立つことを示せ：

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)+f(a-h,b)+f(a,b+h)+f(a,b-h)-4f(a,b)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

（ヒント：1 変数関数の Taylor の定理を適用した後，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ の (a,b) における連続性を用いる.）

問題 1.5 (教科書の **Exercise 1.11**). A を $\mathbb{Z}^d$ の空でない有限集合とし，$F : \partial A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ とする．このとき $\widetilde{F} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ で

$$\widetilde{F}|_{\partial A} = F, \qquad \text{かつ} \qquad \text{任意の } x \in A \text{ に対し} \quad (\mathcal{L}\widetilde{F})(x) = -g(x)$$

を満たすものが唯 1 つ存在することを示し，$\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォーク $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ による $\widetilde{F}$ の表示式を与えよ.（ヒント：教科書の Theorem 1.5 と Theorem 1.12 を用いる.）

2 選択問題：以下の問題 2.1〜2.3 から 1 題もしくは 2 題を選んで解答せよ.

問題 2.1 (教科書の **Exercise 1.19**). $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (-1,1)$ は $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$ を満たすとし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $s_n := (1+\delta_1)\cdots(1+\delta_n)$ とおく．
(0) $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であることを示せ.
(1) 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ において収束し，その極限 $s_\infty := \lim_{n\to\infty} s_n$ は $s_\infty > 0$ を満たすことを示せ.
(2) 次を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ：$n \geq N$ であるような任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left|1 - \frac{s_n}{s_\infty}\right| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\delta_j|.$$

（ヒント：(1), (2) とも，(0) の主張に注意し，$|x|$ が小さいとき $1+x$ が指数関数 e^x により近似できることを利用して $1+\delta_k$ たちの積を δ_k たちの和と結びつける.）

問題 2.2 (教科書の **Example 1.10**). 各 $j \in \{1,\ldots,d\}$ に対し $N_j \in \mathbb{N}$, $N_j \geq 2$ とし，$A \subset \mathbb{Z}^d$ を

$$A := \left\{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; \text{任意の } j \in \{1,\ldots,d\} \text{ に対し } 1 \leq x_j \leq N_j - 1\right\}$$

で定める．各 $\bar{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in A$ に対し $\phi_{\bar{k}} : \overline{A} \to \mathbb{R}$ と $\lambda_{\bar{k}} \in \mathbb{R}$ を次で定める：

$$\phi_{\bar{k}} := \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{N_1}\right)\cdots\sin\left(\frac{k_d \pi x_d}{N_d}\right), \qquad \lambda_{\bar{k}} := \frac{1}{d}\left(\cos\left(\frac{k_1\pi}{N_1}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{k_d\pi}{N_d}\right)\right).$$

(1) 各 $\bar{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in A$ に対し，$\phi_{\bar{k}}$ は固有値 $\lambda_{\bar{k}}$ の，行列 $\mathbf{Q}_A$ の固有関数であることを示せ.
(2) $(\phi_{\bar{k}})_{\bar{k}\in A}$ は互いに直交する関数からなる $\mathbb{R}^A$ の基底であることを示せ.

問題 2.3 (教科書の **Exercise 1.22** を少し修正). $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークとする．A を $\mathbb{Z}^d$ の空でない有限集合とし，A の元の個数を N とする．$T_A := \min\{n \geq 0 \mid S_n \notin A\}$ と定める．このとき任意の $x \in A$ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し次が成り立つことを示せ：

$$\mathbb{P}_x[T_A > kN] \leq \left(1 - \left(\frac{1}{2d}\right)^N\right)^k.$$

（ヒント：講義中で説明した，$n \in \mathbb{N}$ と $x_0, x_n \in A$ に対して成り立つ次の等式を用いる：

$$\mathbb{P}_{x_0}[S_n = x_n,\, T_A > n] = \mathbf{Q}_A^n(x_0, x_n).\text{）}$$