

所属学部・学科:

学籍番号:

氏名:

## 演習問題7 (2017年11月16日)

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること:

- 所属学部・学科, 学籍番号, 氏名を忘れずに記入すること.
- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 演習 5.1.A (第1問) は各自の自習のために設けたものであり, 講義時間中に解く必要はない.

演習 5.1.A.  $U, V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とし,  $T: U \rightarrow V$  を  $\mathbb{R}$ -線形写像とする.

(1)  $T$  の像  $\text{Im}(T) := \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\}$  が  $V$  の部分空間であることを示せ.

(2)  $T$  の核  $\text{Ker}(T) := \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V\}$  が  $U$  の部分空間であることを示せ.

演習 5.1.B. 次の写像  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が線形写像かどうか調べよ.

$$(1) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 10x_2 - 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

**演習 5.1.C.** 演習 4.4.A および演習 4.4.C と同じく,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathbb{R}^3$  を

$$\mathbf{a}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

で定め,  $3 \times 4$  行列  $A$  を  $A := [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$  で定める. また線形写像  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を次で定める:

$$T(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{すなわち, } T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}).$$

- (1)  $T$  の退化次数  $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$  と  $\text{Ker}(T)$  の 1 組の基底を求めよ.
- (2)  $T$  の階数  $\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$  と  $\text{Im}(T)$  の 1 組の基底を求めよ.