

第 1 回レポート

締め切り: 2017 年 10 月 18 日 (水) 17:00

提出先: 数学専攻事務室 (理学部 B 棟 4 階 B410 号室)

以下の問題 1.1~1.3 に可能な限り多く解答し, レポートとして提出すること.

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 数学的に厳密な議論を行うこと. 厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない.
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが, レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず, 自分の言葉で解答すること.

問題 1.1. (X, \mathcal{M}) を可測空間, S を集合, $f: X \rightarrow S$ とし, $\mathcal{A}_f \subset 2^S$ を

$$\mathcal{A}_f := \{A \subset S \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$$

で定める. このとき \mathcal{A}_f は S の σ -加法族であることを示せ.**問題 1.2.** (X, \mathcal{M}, μ) を測度空間とし, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ とする.(1) $B_1 := A_1$ とし, 各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ とする. このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

であることを示せ.

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ (この性質を測度 μ の **(可算) 劣加法性** という):

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

問題 1.3 (講義中の命題 1.9 の証明). $d \in \mathbb{N}$ とし, $\mathcal{F}_d, \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ を次で定める:

$$\mathcal{F}_d := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \mid \text{各 } k \in \{1, \dots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ かつ } a_k \leq b_k\} \cup \{\emptyset\},$$

$$\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \mid \text{各 } k \in \{1, \dots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ かつ } a_k \leq b_k\} \cup \{\emptyset\}.$$

このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}})$ であることを, 次の問に順次答えることにより証明せよ.(1) $\sigma(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}) \subset \sigma(\mathcal{F}_d)$ であることを示せ.(2) $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示し, さらに $\sigma(\mathcal{F}_d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示せ.(3) U を \mathbb{R}^d の開集合とし, $\mathcal{F}_U := \{I \in \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \mid I \subset U\}$ とおく. $U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_U} I$ であることを示せ.(4) $\{U \subset \mathbb{R}^d \mid U \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ の開集合}\} \subset \sigma(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}})$ を示し, さらに $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}})$ であることを示せ.