

演習問題 (2018年10月2日)

以下は高等学校の数学 III で学習した積分法の復習および今後の講義内容の準備を兼ねた, 1 変数関数の積分の計算問題である. 以下の問題 1.1~1.9 に解答せよ. 解答に際しては, 講義ノート (手書きノートのコピー) 中の以下の各項目の記述 (特に (5)~(7)) を参考にすること:

- (1) 定理 1.14 (微分積分学の基本定理; 数学 III ではこれが定積分の定義であった)
- (2) 例 1.17 (不定積分が逆三角関数で与えられる最も基本的な場合)
- (3) 定理 1.18 (置換積分法; 数学 III で学習済み)
- (4) 定理 1.19 (部分積分法; 数学 III で学習済み)
- (5) 「積分の計算 (1) 有理関数」 (特に補題 1.22, 例 1.24 および例 1.25)
- (6) 「積分の計算 (2) 三角関数」
- (7) 「積分の計算 (3) 無理関数」

問題 1.1. (1) 定積分 $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ を求めよ.

(2) 極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\int x e^{-x^2} dx$ を求め, さらに極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A x e^{-x^2} dx$ を求めよ.

問題 1.2. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. 極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$ を求めよ (ただし極限值として ∞ も許すものとする). (ヒント: $\alpha > 1, \alpha = 1, \alpha < 1$ の 3 通りに場合分けせよ.)

問題 1.3. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

(1) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$ を求めよ. (ヒント: $u = \log x$ とおいて置換積分せよ.)

(2) 極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_e^A \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$ を求めよ (ただし極限值として ∞ も許すものとする).

問題 1.4. $a \in \mathbb{R}, a > 0$ とする.

(1) 不定積分 $\int \frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}} dx$ を求めよ. (ヒント: $u = e^{ax}$ とおいて置換積分せよ.)

(2) 極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}} dx$ を求めよ.

問題 1.5. (1) 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ を求めよ. (ヒント: 例 1.17-(1) を用いよ.)

(2) 極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ および極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ を求めよ.

問題 1.6. (1) 不定積分 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ を求めよ. (ヒント: 部分積分法と例 1.17-(2) を用いよ.)

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ を求めよ.

(3) 極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ を求めよ.

問題 1.7. (1) $\frac{3x}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ が変数 x の恒等式となるような $a, b, c \in \mathbb{R}$ を求めよ.
(この変形を, 有理関数 $\frac{3x}{x^3+1}$ を **部分分数に分解する** という. 例 1.25 の直前の記述も参照のこと.)

(2) 不定積分 $\int \frac{3x}{x^3+1} dx$ を求めよ.

(3) 極限 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{3x}{x^3+1} dx$ を求めよ.

問題 1.8. $u = \tan \frac{x}{2}$ において置換積分を行うことにより, 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \qquad (2) \int \frac{1}{\sin^3 x} dx$$

問題 1.9. 不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよ. (ヒント: 部分積分法と例 1.17-(3) を用いよ.)