演習問題2（2018 年 11 月 13 日）

問題 2.1. ガンマ関数 $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を，収束する広義積分

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \qquad \alpha > 0,$$

により定義する．このとき任意の $\alpha > 0$ に対し

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

が成り立つことを示せ．

問題 2.2. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$ が絶対収束し，さらにその値が具体的に求まることを示そう．

(1) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x$ であることを示せ．

(2) $0 < x \le 1$ の範囲での関数 $x^{1/2}\log x$ の最大値・最小値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$ は絶対収束することを示せ．

（ヒント：$\int_0^1 \log\sin x\, dx$ の絶対収束を示せばよい．(1), (2) を用いて定理 1.51 の条件の成立を示せ．）

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\sin x\, dx$ は共に絶対収束し

$$\int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$$

であることを示せ．（ヒント：$\int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx$, $\int_{\pi/2}^{\pi} \log\sin x\, dx$ に置換積分を行い (3) に帰着させよ．）

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx$ の値を求めよ．

（ヒント：広義積分 $\int_0^{\pi} \log\sin x\, dx$ に対し $x = 2u$ とおいて置換積分を行った後，(4) を用いよ．）

問題 2.3. 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \max\{x, y^2\}\, dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 y e^{-xy^2}\, dxdy$　　(3) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[1,3]} x^y\, dxdy$