

第1回レポート (演習問題3)

締め切り: 2019年1月22日 (火) 午前9時

提出先: 大学教育推進機構・国際教養教育院事務室
(鶴甲第1キャンパスK棟1階)の横のレポートBox

以下の問題3.1~3.3に可能な限り多く解答し、レポートとして提出すること。

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと。試験答案やレポートも「他者に読んでもらう文章」なのだから、自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない。
- 数学的内容の理解の為に他者と相談するのは構わないが、レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず、自分の言葉で解答すること。

問題 3.1. $[0, 1] \times (0, \infty)$ 上で定義された関数 $(x, \alpha) \mapsto x^\alpha \log x$ (ただし $x = 0$ のときは $x^\alpha \log x := 0$ と定める) が連続であること (これは証明なしで認めてよい) を用いて、次の各問いに答えよ。

(1) 任意の $\alpha > 0$ に対し $\int_0^1 x^\alpha \log x \, dx = -\frac{1}{(\alpha + 1)^2}$ であることを示せ。(ヒント: 定理 2.18)

(2) 任意の $\alpha > 0$ と任意の正の整数 n に対し $\int_0^1 x^\alpha (\log x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$ であることを示せ。

問題 3.2. 次の2重積分, 3重積分の値を求めよ。

(1) $\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1/2, x^2 + y^2 \leq 1\}} x \, dx dy$

(2) $\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{y}\}} y \, dx dy$

(3) $\iiint_{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2 + 1\}} xy \, dx dy dz$

問題 3.3. $a > 0$ とするとき、次で定義される \mathbb{R}^3 の部分集合 D の体積を求めよ。

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ かつ } x^2 + z^2 \leq a^2\}.$$