フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門

梶野　直孝（神戸大学大学院理学研究科）

数学特別講義 I
（奈良女子大学理学部　2018 年度集中講義）
2018 年 11 月 1 日

序

本稿は奈良女子大学理学部における 2018 年度集中講義「数学特別講義 I」の講義内容の一部をまとめたものである．

本講義では Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式（及び対応する Laplacian）の構成を取り扱う．本稿の内容は主に木上淳氏による monograph [28, Chapters 2] の記述に従うが，必要に応じて同氏による最近の論文 [30, 31] の結果も取り入れて筆者なりに整理したつもりである．原則として証明を省略することはせず，数学的に完全に理解することを目標とする．ただし講義回数に限りがあるため，内容は Dirichlet 形式の構成を理解する為に最低限必要な範囲に留めており，触れることのできていない重要な事柄も多い．本講義で割愛した事項については [28, Chapters 1–3] 及び本文中で示した文献を参照されたい．

京都大学大学院情報学研究科の木上淳氏は筆者がまだ学部生の頃から現在に至るまで大変丁寧にご指導下さり，未熟な学生であった筆者をフラクタル上の解析学の豊かな世界に導いて下さった．数々の学恩に心より感謝申し上げる．

またこの度は奈良女子大学理学部において筆者の専門について既知の事実を整理し講義する貴重な機会をいただいた．講師としてお招きいただいた篠田正人氏，嶽村智子氏はじめ奈良女子大学理学部の皆様に篤くお礼申し上げる．

2018 年 10 月，神戸にて
梶野　直孝

目次

本講義を通して使われる記号

本論に入る前に，本講義を通して使われる幾つかの記号をここで導入しておく．
(1) 等式

$$A := B$$

は「A を B で定義する」の意味に用いる．
(2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は通常通り自然数全体，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体の集合をそれぞれ表す．本稿では $\mathbb{N}$ は 0 を含まないと約束する：

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

(3) 集合 A に属する元の総数を $\#A$ で表す．$\#A \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ である．
(4) 集合 X, Y，写像 $f : X \to Y$ と $A \subset X$ に対し，写像 $f|_A : A \to Y$ を $f|_A(x) := f(x), x \in A$ により定める．この $f|_A$ を f の A への制限という．
(5) 空集合 $\emptyset$ の上限，最大値，下限，最小値は $\sup \emptyset := \max \emptyset := 0, \inf \emptyset := \min \emptyset := \infty$ と約束する．$a, b \in [-\infty, \infty]$ に対し $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$, $a^+ := a \vee 0$, $a^- := -(a \wedge 0)$ と定め，$[-\infty, \infty]$-値関数に対しても同様の記号を用いるものとする．本稿では関数と言えば $[-\infty, \infty]$-値関数のみを考えるものとする．
(6) $d \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{R}^d$ には通常の Euclid ノルム $|\cdot|$ を入れる．$d \times d$ 単位行列を I_d で表し，実行列 M に対しその転置行列を M^* で表す．
(7) X を位相空間とする．$A \subset X$ に対しその X における内部，閉包，境界をそれぞれ $\mathrm{int}_X A, \overline{A}^X, \partial_X A$ で表す．X の Borel σ-加法族（X の開集合全体を含む X における σ-加法族のうちで最小のもの）を $\mathcal{B}(X)$ で表す．さらに $\mathcal{C}(X) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ は連続}\}$, $f \in \mathcal{C}(X)$ に対し $\mathrm{supp}_X[f] := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}^X$, $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ とおき，$\mathcal{C}_c(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \mathrm{supp}_X[f] \text{ はコンパクト}\}$ とする．
(8) (X, ρ) を距離空間，$x \in X$ とする．$r \in (0, \infty)$ に対し $B_\rho(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$, $\overline{B}_\rho(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$ とおき，また $A \subset X$ に対し $\mathrm{dist}_\rho(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, $\mathrm{diam}_\rho A := \sup_{y, z \in A} \rho(y, z)$ とおく．$A \subset X$ が $\mathrm{diam}_\rho A < \infty$ を満たすとき，A は ρ-有界であるという．

第 2 章

抵抗形式と有効抵抗距離

本章では，第 3 章で Sierpiński gasket 上に Laplacian を構成するための準備として，抵抗形式とそこから生じる対称正則 Dirichlet 形式の一般論を取り扱う．

対称正則 Dirichlet 形式とは，Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の（適当な滑らかさを持つ）関数 u, v に対して定義される双線型形式

$$\mathcal{E}(u, v) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \tag{2.1}$$

を抽象的に一般化した概念である．双線型形式 (2.1) が部分積分の公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^d} v \Delta u dx \tag{2.2}$$

により $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian Δ との自然な対応関係を持つように，対称正則 Dirichlet 形式が与えられると L^2-内積を経由して Laplacian に相当する（自己共役で，一般に有界とは限らない）作用素を自然に定めることができる．

また確率論的な対応物として，$\mathbb{R}^d$ 上にはよく知られているように Brown 運動（Wiener 過程）$B = (\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ が定義され，その性質から（多少の面倒な計算は必要になるが，比較的容易に）

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[u(B_{2t})] - u(x)}{t} = \Delta u(x) \tag{2.3}$$

が適当な滑らかさと可積分性を持つ関数 u に対して成り立つことが証明される．関係式 (2.3) の一般化として対称正則 Dirichlet 形式に対しては，適当に良い性質を持つ確率過程 $X = \{X_t\}$ で，(2.3) に相当する関係式を（L^2-ノルム収束の意味で）満たすものが存在することが知られている．

さらに Brown 運動 $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ についてはその見本路 $[0,\infty) \ni t \mapsto B_t(\omega)$ は連続であるが，この性質は対応する Dirichlet 形式の局所性

$$\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^d}[u] \cap \mathrm{supp}_{\mathbb{R}^d}[v] = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0 \tag{2.4}$$

により特徴付けられる．すなわち，対称正則 Dirichlet 形式に対応する確率過程 $X = \{X_t\}$ が連続な見本路を持つためには，元の Dirichlet 形式が (2.4) に相当する局所性を持つという意味で局所的であることが必要十分である．（上記の対称正則 Dirichlet 形式の一般論について詳細は [12, 11] を参照のこと．）

さて，我々の目標は Sierpiński gasket において自然な Laplacian や熱方程式を定式化することであった．Sierpiński gasket は容易に分かるように弧状連結であり，すると「熱は空間を連続的に伝わる」と考えるのが自然であるから，Laplacian に対応する確率過程は連続な見本路を持つことが当然に要求される．そこで上記の対称正則 Dirichlet 形式の一般論を考慮すると，Sierpiński gasket 上に（非自明で）局所的な対称正則 Dirichlet 形式を構成することさえできれば，あとは [12, 11] にある一般論を適用することで Laplacian やそれに (2.3) の意味で対応する確率過程も自動的に得られ，Laplacian の構成という我々の目標が達成される．そこで**（非自明で）局所的な対称正則 Dirichlet 形式を Sierpiński gasket 上に構成すればよい**ことになる．

その方法として，素朴には次のようなものが考えられる：

1. Sierpiński gasket K を有限部分集合の増大列 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ により近似する．
2. 各 V_m 上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(m)} : \mathbb{R}^{V_m}\times\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}$ をとる．
3. $\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を適切に選んでその「$m\to\infty$ とした極限」を取ることにより，K 上の（非自明で自然な）対称正則 Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ が得られる．

このアイデアを実行するのは非常に難しいのが普通である[1]が，実は Sierpiński gasket（に代表される p.-c.f. 自己相似フラクタルと呼ばれる範疇のフラクタル）に対しては，ある（自己相似的な形で定義される）自然な $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考えることで，比較的平易な議論により上記のアイデアを実行することができる．さらに各 $\mathcal{E}^{(m)}$ が極限の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ の V_m への「制限」（あるいは，$\mathcal{E}$ が $\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ の「帰納極限」[2]）になっていることが分かり，そのことから $\mathcal{E}$ について色々と具体的な計算を行うことが可能になる．以上のことを証明し，それにより Sierpiński gasket 上の局所的な対称正則 Dirichlet 形式を得るのが第 3 章の目標である．

本章ではその準備として，主に [28, Chapter 2] に従い有限集合上の Dirichlet 形式の列の「帰納極限」についての一般論を展開する．具体的には，まず 2.1 節で有限集合上の Dirichlet 形式[3]の性質を詳しく調べる．そこで見るように，有限集合 V において Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ を考えることは V に連結な電気回路の構造を導入することに他ならず，そこで自然に定まる 2 点 $x,y\in V$ の間の「有効抵抗」$R_{\mathcal{E}}(x,y)$ を考えると実は $R_{\mathcal{E}}$ は V 上の距離関数になる．この「有効抵抗距離」の概念が本章では（従って p.-c.f. 自己相似フラクタル上の Laplacian の構成と解析にも）極めて重要な役割を果たす．続いて 2.2 節で，有限集合 V_m とその上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ の列 $\mathcal{S}=\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ の自然な「帰納極限」を取ることができるための条件を与え，さらに極限として得られる可算集合 $\bigcup_{m=0}^{\infty}V_m$ 上の双線型形式 $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の基本性質を述べる．2.3 節では，2.2 節の $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ と同様の性質を有する，可算とは限らない一般の集合上で定義された双線型形式を「抵抗形式」として定式化しその一般論を展開する．特に，任意の抵抗形式が有限集合上の Dirichlet 形式の「帰納極限」として記述できること，有効抵抗距離に関する完備化を考えることにより 2.2 節の $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ から自然に非可算集合上の抵抗形式が得られること，及び Green 関数が（抵抗形式の再生核として）自然に定まることを示す．

---

[1] 例えば Sierpiński carpet に対してはこれは楠岡-Zhou [39] によりなされたが，そこでの証明は複雑な計算による幾つもの精密な不等式評価の積み重ねであり，細部まで正確に理解するのはかなり骨が折れる．以前筆者が [39] を読んだときには，途中の計算を追うことはできた（と思う）がその計算に至る発想の由来は全然分からなかった．

[2] 「帰納極限」という語はここでは「極限値の『有限の段階への制限』が極限を取る前の値に一致するという性質を満たすような極限概念」の意味に用いている．

[3] 本章で取り扱う有限集合上の Dirichlet 形式は，正確には Dirichlet 形式の一般論で言うところの「既約再帰的な」Dirichlet 形式である．定義 2.2 とその直前の記述を参照のこと．

記号. 本章を通して以下の記号を用いる.
(1) K を空でない集合とする. $A \subset K$ に対し $\mathbf{1}_A^K \in \mathbb{R}^K = \{u \mid u : K \to \mathbb{R}\}$ を

$$\mathbf{1}_A^K(x) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in K \setminus A, \end{cases} \tag{2.5}$$

で定める. 誤解の恐れがない場合には, K を省略してこれを単に $\mathbf{1}_A$ と書く. また $x \in K$ に対し $\mathbf{1}_{\{x\}}^K, \mathbf{1}_{\{x\}}$ をそれぞれ単に $\mathbf{1}_x^K, \mathbf{1}_x$ と書く.
(2) 空でない有限集合 V に対し, $\mathbb{R}^V$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ を次で定める：

$$\langle u, v \rangle_V := \sum_{x \in V} u(x)v(x), \quad u, v \in \mathbb{R}^V. \tag{2.6}$$

(3) U, V を空でない有限集合とする. 線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ に対し $L_{xy} := (L\mathbf{1}_y^V)(x)$ により行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ を定める. 容易に分かるように, $L \mapsto (L_{xy})_{x \in U, y \in V}$ は線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ の全体から行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ の全体への線型同型であり, 以下この線型同型により線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ と行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} = \bigl((L\mathbf{1}_y^V)(x)\bigr)_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ を同一視する.

さらに $U = V$ のとき, 線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^V$ に対し双線型形式 $\mathcal{E}_L : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}_L(u, v) := \langle u, -Lv \rangle_V$ で定める. L が内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ について対称（すなわち双線型形式 $\mathcal{E}_L$ が対称）であるためには L に対応する行列 $(L_{xy})_{x,y \in V}$ が対称行列であることが必要十分であることを注意しておく.

2.1 有限集合上の抵抗形式と有効抵抗距離

本節では有限集合上の Dirichlet 形式と対応する有効抵抗距離の基本性質を取り扱う. まず, 次の基本的な事実を思い出しておく.

命題 2.1. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とし, $\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の非負定値対称双線型形式とする. このとき任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し

（Cauchy-Schwarz の不等式） $$|\mathcal{E}(u, v)| \le \mathcal{E}(u, u)^{1/2} \mathcal{E}(v, v)^{1/2}, \tag{2.7}$$

（3 角不等式） $$\mathcal{E}(u + v, u + v)^{1/2} \le \mathcal{E}(u, u)^{1/2} + \mathcal{E}(v, v)^{1/2}. \tag{2.8}$$

証明. $u, v \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}$ とする. $\mathcal{E}$ は非負定値対称双線型なので

$$0 \le \mathcal{E}(u + tv, u + tv) = \mathcal{E}(u, u) + 2t\mathcal{E}(u, v) + t^2 \mathcal{E}(v, v). \tag{2.9}$$

$\mathcal{E}(v, v) = 0$ のときは, (2.9) より任意の $t \in (0, \infty)$ に対し $|\mathcal{E}(u, v)| \le t^{-1}\mathcal{E}(u, u)$ であり, 従って $\mathcal{E}(u, v) = 0$ となり (2.7) が成り立つ. $\mathcal{E}(v, v) > 0$ のときは, (2.9) で $t := -\mathcal{E}(u, v)/\mathcal{E}(v, v)$ とおくことで $0 \le \mathcal{E}(u, u)\mathcal{E}(v, v) - \mathcal{E}(u, v)^2$ となり (2.7) を得る. さらに (2.9) で $t = 1$ として (2.7) を用いれば直ちに (2.8) が従う. □

有限集合上の（既約再帰的な）Dirichlet 形式は次で定義される. なお, 有限集合に対しては次の定義は後に 2.3 節で与える抵抗形式の定義（定義 2.26）と一致するため, 用語の統一のため最初からこれを抵抗形式と呼ぶことにする.

定義 2.2 (有限集合上の抵抗形式)**.** V を空でない有限集合とする. $\mathbb{R}^V$ 上の非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E} : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ が次の 2 条件を満たすとき, $\mathcal{E}$ は V 上の**抵抗形式** (resistance form) であるという：
(RF1)$_{\mathrm{fin}}$ $\{u \in \mathbb{R}^V \mid \mathcal{E}(u, u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_V$.
(RF2)$_{\mathrm{fin}}$ （Markov 性）任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \le \mathcal{E}(u, u)$.

さらに $\mathcal{RF}(V) := \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E}$ は V 上の抵抗形式$\}$ とおく.

定義 2.3 (有限集合上の Laplacian)**.** V を空でない有限集合とする．$\mathbb{R}^V$ 上の対称線型写像 $L = (L_{xy})_{x,y\in V} : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^V$ が次の 2 条件を満たすとき，L は V 上の **Laplacian** であるという：
(LA1) $\{u \in \mathbb{R}^V \mid Lu = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_V$.
(LA2) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し $L_{xy} \geq 0$.
　さらに $\mathcal{LA}(V) := \{L \mid L$ は V 上の Laplacian$\}$ とおく．

定義 2.4 (有限集合上の抵抗網構造)**.** V を空でない有限集合とする．次の 2 条件を満たす $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} \subset (0,\infty]$ を V 上の**抵抗網構造** (resistor network structure) という：
(RN1) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し $r_{xy} = r_{yx}$.
(RN2) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し，$n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ が存在して，$x_0 = x, x_n = y$, かつ任意の $k \in \{1,\ldots,n\}$ に対し $x_{k-1} \neq x_k$ かつ $r_{x_{k-1}x_k} < \infty$.
　さらに $\mathcal{RN}(V) := \{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r}$ は V 上の抵抗網構造$\}$ とおく．

　次の命題に述べるように，$\mathcal{RF}(V), \mathcal{LA}(V), \mathcal{RN}(V)$ の間には自然な全単射が存在し，これにより $\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ は対応する $L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$ 及び $\boldsymbol{r}_{L_{\mathcal{E}}} \in \mathcal{RN}(V)$ と自然に同一視される．

命題 2.5. V を空でない有限集合とする．
(1) $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $\mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ であり，$\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ は全単射でその逆写像は $\mathcal{RF}(V) \ni \mathcal{E} \mapsto L_{\mathcal{E}} := (-\mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y\in V}$ で与えられる．
(2) $L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $\boldsymbol{r}_L := (L_{xy}^{-1})_{x,y\in V, x\neq y} \subset (0,\infty]$ $(0^{-1} := \infty)$ とおくと $\boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$. また $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} \in \mathcal{RN}(V)$ に対し $L_{\boldsymbol{r}} = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathbb{R}^{V\times V}$ を $x \neq y$ のとき $L_{xy} := r_{xy}^{-1}$, $x = y$ のとき $L_{xx} := -\sum_{z\in V\setminus\{x\}} r_{xz}^{-1}$ $(\infty^{-1} := 0)$ により定めると $L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$. さらに $\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ と $\mathcal{RN}(V) \ni \boldsymbol{r} \mapsto L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ は互いに逆の全単射である．

証明. (1) $L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$u \in \mathbb{R}^V$ とする．(LA1) と L の対称性より任意の $x \in V$ に対し $\sum_{y\in V} L_{xy} = \sum_{y\in V} L_{yx} = 0$ であるので，(LA2) より

$$\mathcal{E}_L(u,u) = -\sum_{x,y\in V} L_{xy}u(x)u(y) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} L_{xy}(u(x)-u(y))^2 \geq 0. \tag{2.10}$$

すると $\mathcal{E}_L$ は $\mathbb{R}^V$ 上の非負定値対称双線型形式となるので，$\mathcal{E}_L(u,u) = 0$ とすると (2.7) により $\langle Lu, Lu\rangle_V = \mathcal{E}_L(-Lu, u) = 0$, 従って $Lu = 0$ となり，(LA1) より $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. 逆に $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ のとき $Lu = 0$ より $\mathcal{E}_L(u,u) = \langle u, -Lu\rangle_V = 0$. さらに任意の $x, y \in V$ に対し $|(u^+ \wedge 1)(x) - (u^+ \wedge 1)(y)| \leq |u(x) - u(y)|$ であるので，(2.10) より $\mathcal{E}_L(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}_L(u,u)$. 以上から $\mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$. また明らかに $L_{\mathcal{E}_L} = (-\mathcal{E}_L(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y\in V} = L$ であり，特に $\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ は単射である．

　次に $\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ とし，$L_{\mathcal{E}} = (-\mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y\in V} =: (L_{xy})_{x,y\in V}$ とおく．明らかに $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}}}$ であるので，前段落を考慮すると $L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$ を示せば (1) の証明が完了する．$\mathcal{E}$ の対称性から $L_{\mathcal{E}}$ は対称である．$u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ ならば $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $\mathcal{E}(u,u) = 0$, 従って (2.7) より $\langle L_{\mathcal{E}}u, L_{\mathcal{E}}u\rangle_V = -\mathcal{E}(L_{\mathcal{E}}u, u) = 0$ となり，よって $L_{\mathcal{E}}u = 0$. 逆に $u \in \mathbb{R}^V, L_{\mathcal{E}}u = 0$ ならば $\mathcal{E}(u,u) = \langle u, -L_{\mathcal{E}}u\rangle_V = 0$ となり $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. 次に (LA2) を示すために $x, y \in V, x \neq y$ とする．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とし $u := \mathbf{1}_x - \varepsilon\mathbf{1}_y \in \mathbb{R}^V$ とおくと，$u^+ \wedge 1 = \mathbf{1}_x$ であるので $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ により

$$-L_{xx} + 2\varepsilon L_{xy} - \varepsilon^2 L_{yy} = \mathcal{E}(u,u) \geq \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) = -L_{xx},$$

従って $L_{xy} \geq (\varepsilon/2)L_{yy}$ となり，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意であるので $L_{xy} \geq 0$. よって $L_{\mathcal{E}}$ が (LA2) を満たすことが分かり，$L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$.
(2) $L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ とする．L は対称なので $\boldsymbol{r}_L = (L_{xy}^{-1})_{x,y\in V, x\neq y} =: (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y}$ は (RN1) を満たす．(RN2) を示すために，$x \in V$ とし

$$V_L^x := \{x\} \cup \left\{ y \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \text{ と } \{x_k\}_{k=0}^n \subset V \text{ が存在して，} x_0 = x, x_n = y, \text{かつ} \\ \text{任意の } k \in \{1,\dots,n\} \text{ に対し } x_{k-1} \neq x_k \text{ かつ } r_{x_{k-1}x_k} < \infty \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

とおく．すると V_L^x の定義 (2.11) から $y \in V_L^x, z \in V \setminus V_L^x$ に対し $r_{yz} = r_{zy} = \infty$, すなわち $L_{yz} = L_{zy} = 0$ でなければならず，このとき $L\mathbf{1}_V = 0$ より $L\mathbf{1}_{V_L^x} = 0$ が得られる．従って (LA1) より $\mathbf{1}_{V_L^x} \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ であり，$\mathbf{1}_{V_L^x}(x) = 1$ より $\mathbf{1}_{V_L^x} = \mathbf{1}_V$, すなわち $V_L^x = V$. これは (RN2) を意味し，よって $\boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ が従う．

逆に $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} \in \mathcal{RN}(V)$ とし $L_{\boldsymbol{r}} = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathbb{R}^{V\times V}$ を主張のように定める．$L_{\boldsymbol{r}}$ はその定義より (LA2) と $L_{\boldsymbol{r}}\mathbf{1}_V = 0$ を満たし，(RN1) より対称である．次に $u \in \mathbb{R}^V$ は $L_{\boldsymbol{r}}u = 0$ を満たすとし，$u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ を示すために $x \in V$ を $u(x) = \max_{z\in V} u(z)$ となるように取る．$y \in V \setminus \{x\}$ とし，(RN2) のように $n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ を取る．このとき $u(x_0) = u(x) = \max_{z\in V} u(z)$ に注意し，$k \in \{1,\dots,n\}, u(x_{k-1}) = \max_{z\in V} u(z)$ と仮定すると，$r_{x_{k-1}x_k} \in (0,\infty)$ であり

$$0 = (L_{\boldsymbol{r}}u)(x_{k-1}) = \sum_{z\in V\setminus\{x_{k-1}\}} r_{x_{k-1}z}^{-1}(u(z) - u(x_{k-1})) \leq \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{r_{x_{k-1}x_k}} \leq 0$$

なので $u(x_k) = u(x_{k-1}) = \max_{z\in V} u(z)$. 従って k についての数学的帰納法により $u(y) = u(x_n) = u(x)$ となり，$y \in V \setminus \{x\}$ は任意なので $u = u(x)\mathbf{1}_V \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. よって $L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ である．

最後に，容易に確認できるように任意の $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $L_{\boldsymbol{r}_L} = L$, また任意の $\boldsymbol{r} \in \mathcal{RN}(V)$ に対し $\boldsymbol{r}_{L_{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{r}$ であるので，$\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ と $\mathcal{RN}(V) \ni \boldsymbol{r} \mapsto L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ は互いに逆の全単射である． □

注意 2.6. V を空でない有限集合，$\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ とし，$L = (L_{xy})_{x,y\in V} := L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$, $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} := \boldsymbol{r}_{L_{\mathcal{E}}} \in \mathcal{RN}(V)$ をそれぞれ命題 2.5 の意味で $\mathcal{E}$ に対応する V 上の Laplacian 及び抵抗網構造とする．このとき $x, y \in V, x \neq y$ に対し，$r_{xy} < \infty$ なら x と y は抵抗値 r_{xy} の抵抗器により接続されており，$r_{xy} = \infty$ なら x と y は抵抗器により直接接続されてはいないと考えることにより，V には抵抗器のネットワーク構造が備わっていると見なすことができる．このとき (2.10) より $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\mathcal{E}(u,u) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y\in V, x\neq y \\ r_{xy}<\infty}} \frac{(u(x) - u(y))^2}{r_{xy}} \tag{2.12}$$

であるが，(2.12) の右辺は

「抵抗網 $(V, \boldsymbol{r})$ に電位 $u = (u(x))_{x\in V}$ を与えたときの V 上での総消費電力」

に他ならない．$\mathcal{RF}(V)$ の元を V 上の抵抗形式と呼ぶのはこのことに由来する．

次に，抵抗形式の部分集合への「制限」について考察する．

補題 2.7. V を有限集合とし，$U \subsetneq V, U \neq \emptyset$ とする．$L \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$T = T_U \in \mathbb{R}^{U\times U}$, $J = J_U \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times U}$, $X = X_U \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times(V\setminus U)}$ を，L の $U, U \setminus V$ の各成分への分割

$$L = \begin{pmatrix} T & J^* \\ J & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_U & J_U^* \\ J_U & X_U \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

により定める．このとき X は負定値対称行列であり，また任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\mathcal{E}_L(u,u) = \mathcal{E}_X(u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U)) + \mathcal{E}_{T-J^*X^{-1}J}(u|_U, u|_U). \quad (2.14)$$

証明. L は対称なので，(2.13) より X も対称である．$v \in \mathbb{R}^{V\setminus U}$ とし，$\tilde{v} \in \mathbb{R}^V$ を $\tilde{v}|_{V\setminus U} := v, \tilde{v}|_U := 0$ により定めると，$\mathcal{E}_X(v,v) = \mathcal{E}_L(\tilde{v},\tilde{v}) \geq 0$ なので $\mathcal{E}_X$ は非負定値であり，さらに $\mathcal{E}_X(v,v) = 0$ ならば $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $\tilde{v} \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ となるので $\tilde{v}|_U = 0\ (U \neq \emptyset)$ により $\tilde{v} = 0$, よって $v = 0$ である．すなわち $\mathcal{E}_X$ は正定値であり，従って X は負定値である（ので X^{-1} が存在する）．最後に $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_X(u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U)) \\
&= \langle u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), -X(u|_{V\setminus U}) - J(u|_U)\rangle_{V\setminus U} \\
&= \langle u|_{V\setminus U}, -X(u|_{V\setminus U})\rangle_{V\setminus U} + 2\langle u|_{V\setminus U}, -J(u|_U)\rangle_{V\setminus U} + \langle u|_U, -J^*X^{-1}J(u|_U)\rangle_U \\
&= \mathcal{E}_L(u,u) + \langle u|_U, T(u|_U)\rangle_U + \langle u|_U, -J^*X^{-1}J(u|_U)\rangle_U \\
&= \mathcal{E}_L(u,u) - \mathcal{E}_{T-J^*X^{-1}J}(u|_U, u|_U)
\end{aligned}$$

となるので，(2.14) を得る． □

定理 2.8. V を有限集合とし，$U \subsetneqq V, U \neq \emptyset$ とする．$L \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$T \in \mathbb{R}^{U\times U}$，$J \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times U}$，$X \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times(V\setminus U)}$ を (2.13) で定める．$u \in \mathbb{R}^U$ とし，$h_U(u) = h_U^L(u) \in \mathbb{R}^V$ を $h_U(u)|_U := u, h_U(u)|_{V\setminus U} := -X^{-1}Ju$ で定める．
(1) $h_U(u)$ は最小値 $\min_{v\in\mathbb{R}^V, v|_U = u} \mathcal{E}_L(v,v)$ を達成する唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^V$ である．
(2) $[L]_U := T - J^*X^{-1}J$ とおくと $[L]_U \in \mathcal{LA}(U)$ であり

$$\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = \mathcal{E}_L(h_U(u), h_U(u)) = \min_{v\in\mathbb{R}^V, v|_U = u} \mathcal{E}_L(v,v). \quad (2.15)$$

証明. $v \in \mathbb{R}^V, v|_U = u$ とすると補題 2.7 より X は負定値であるので，(2.14) から

$$\mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_X(v|_{V\setminus U} + X^{-1}Ju, v|_{V\setminus U} + X^{-1}Ju) + \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) \geq \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u)$$

であり，さらに上の不等式における等号成立は $v|_{V\setminus U} = -X^{-1}Ju = h_U(u)|_{V\setminus U}$，すなわち $v = h_U(u)$ と同値である．これで (1) と (2.15) が示せた．

次に $\mathcal{E}_{[L]_U} \in \mathcal{RF}(U)$ を示そう．L の対称性と (2.13) から $[L]_U$ は対称であり，(2.15) より $\mathcal{E}_{[L]_U}$ は対称で非負定値である．さらに (2.15) により，$\mathcal{E}_{[L]_U}(\mathbf{1}_U, \mathbf{1}_U) = 0$ であり，また $u \in \mathbb{R}^U, \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = 0$ とすると $\mathcal{E}_L(h_U(u), h_U(u)) = 0$ なので $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $h_U(u) \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$, 従って $u = h_U(u)|_U \in \mathbb{R}\mathbf{1}_U$ である．最後に $u \in \mathbb{R}^U$ に対し，$(h_U(u)^+ \wedge 1)|_U = u^+ \wedge 1$ であるので (2.15) と $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ により

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) &\geq \mathcal{E}_L(h_U(u)^+ \wedge 1, h_U(u)^+ \wedge 1) \\
&\geq \min_{v\in\mathbb{R}^V, v|_U = u^+\wedge 1} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_U}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1).
\end{aligned}$$

従って $\mathcal{E}_{[L]_U} \in \mathcal{RF}(U)$ であるので，命題 2.5-(1) より $[L]_U = L_{\mathcal{E}_{[L]_U}} \in \mathcal{LA}(U)$． □

注意 2.9. 定理 2.8 の状況を仮定する．
(1) $h_U(u)$ はその定義から，L に関する $V \setminus U$ 上での Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} Lv|_{V\setminus U} = 0 \\ v|_U = u \end{cases} \quad (2.16)$$

の唯 1 つの解 $v \in \mathbb{R}^V$ である．$Lv|_{V\setminus U} = 0$ は v が「L に関して $V \setminus U$ 上で調和」であることを意味しており，このことから $h_U(u)$ を $u \in \mathbb{R}^U$ の「L に関する（あるいは $\mathcal{E}_L$ に関する）V 上への**調和拡張** (harmonic extension)」と呼ぶことがある．

(2.16) の一意解 $h_U(u)$ が定理 2.8-(1) の最小値を達成する唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^V$ にもなっていることに注意されたい．つまり，L に対応する双線型形式 $\mathcal{E}_L$ の最小化問題 $\min_{v\in\mathbb{R}^V, v|_U=u} \mathcal{E}_L(v,v)$ の解を求めることは，L に関する Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (2.16) の解を求めることと同値なのである．同様の事実は Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian（あるいはより一般に楕円型偏微分作用素）に対してはよく知られたことであるが，定理 2.8 はその「離散版」である．

(2) 定理 2.8-(2) の $[L]_U$ が

「$L \in \mathcal{LA}(V)$ の $U \subsetneqq V$ への抵抗網としての制限」

を表している．この意味を説明するために，$v := h_U(u)$ に対する等式 $Lv|_{V\setminus U} = 0$ を「電気回路」的に解釈してみる．$\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} := \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ とおくとき，$(Lv)(x)$ を $\boldsymbol{r}$ を用いて書き換えると

$$(Lv)(x) = \sum_{y\in V\setminus\{x\}, r_{xy}<\infty} \frac{v(y)-v(x)}{r_{xy}} \tag{2.17}$$

となるが，v を V の各点における電位と解釈すれば，(2.17) の右辺は電位 v の下での「x における総流入電流量と総流出電流量の差」を表していることになる．従って $Lv|_{V\setminus U} = 0$ とは

「各 $x \in V \setminus U$ において総流入電流量と総流出電流量が釣り合っている」,

言い換えると

「各 $x \in V \setminus U$ において電流の外部からの流入・外部への流出が起きていない」

ということを表している．中学・高等学校の理科で学んだのは，このような状況で回路の総消費電力を求めるためには，$V \setminus U$ の点を「ないもの」と見なして U における「合成抵抗」を求め，その「合成抵抗」と U の各点の電位 $u = v|_U$ から通常の方法で総消費電力を計算すればよい，ということであった．定理 2.8-(2) の $\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u)$ がまさにこの「合成抵抗を用いた総消費電力の計算」であり，対応する U 上の Laplacian $[L]_U$ が「合成抵抗」を表している．つまり $[L]_U$ は

「抵抗網 L において $V \setminus U$ の点を『ないもの』と見なした『合成抵抗』網」

を表しており，この意味で $[L]_U$ は「L の $U \subsetneqq V$ への抵抗網としての自然な制限」と考えられるのである．

「調和拡張作用素」$h_U = h_U^L : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}^V$ と「制限」$[L]_U$ についてはさらに次が成り立つ．空でない有限集合 V と $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $h_V = h_V^L := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^V}$, $[L]_V := L$ と定める．このとき定理 2.8 の結論は全て $U = V$ の場合も含めて成り立つことに注意する．

命題 2.10. V を有限集合，U, W は V の部分集合で $\emptyset \neq W \subset U$ を満たすとし，$L \in \mathcal{LA}(V)$ とする．このとき $[[L]_U]_W = [L]_W$ かつ $h_U^L \circ h_W^{[L]_U} = h_W^L$. 特に任意の $w \in \mathbb{R}^W$ に対し $h_W^{[L]_U}(w) = h_W^L(w)|_U$.

証明. $w \in \mathbb{R}^W$ とする．$h^L_W(w)|_W = h^L_U \circ h^{[L]_U}_W(w)|_W = w$ であるので (2.15) より

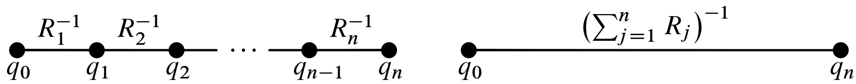
$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{[L]_W}(w,w) = \mathcal{E}_L\bigl(h^L_W(w), h^L_W(w)\bigr)\\
&\geq \min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_U = h^L_W(w)|_U} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_U}\bigl(h^L_W(w)|_U, h^L_W(w)|_U\bigr)\\
&\geq \min_{u\in\mathbb{R}^U,\, u|_W = w} \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = \mathcal{E}_{[[L]_U]_W}(w,w) = \mathcal{E}_{[L]_U}\bigl(h^{[L]_U}_W(w), h^{[L]_U}_W(w)\bigr)\\
&= \mathcal{E}_L\bigl(h^L_U \circ h^{[L]_U}_W(w), h^L_U \circ h^{[L]_U}_W(w)\bigr) \geq \min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_W = w} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_W}(w,w).
\end{aligned}$$

よって上記の計算中の各辺は全て等しく，そこで定理 2.8-(1) の $h^L_W(w)$ の一意性の主張から $h^L_U \circ h^{[L]_U}_W(w) = h^L_W(w)$ すなわち $h^L_U \circ h^{[L]_U}_W = h^L_W$ が得られ，特にこの等式の両辺の U への制限を考えることにより $h^{[L]_U}_W(w) = h^L_W(w)|_U$ が従う．また $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}(w,w) = \mathcal{E}_{[L]_W}(w,w)$ と $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}, \mathcal{E}_{[L]_W}$ の対称双線型性から $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W} = \mathcal{E}_{[L]_W}$ となり，従って $[[L]_U]_W = L_{\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}} = L_{\mathcal{E}_{[L]_W}} = [L]_W$. □

演習 2.1 (直列回路の合成抵抗). (1) $V = \{q_0, q_1, q_2\}$ を $\#V = 3$ を満たす集合，$R_1, R_2 \in (0,\infty)$ とし，$L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ を $L_{q_0q_1} := R_1^{-1}, L_{q_1q_2} := R_2^{-1}$, $L_{q_0q_2} := 0$ で定めるとき，$[L]_{\{q_0,q_2\}} = (R_1+R_2)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ．
(2) $n \in \mathbb{N}$, $V = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ を $\#V = n+1$ を満たす集合，$\{R_j\}_{j=1}^n \subset (0,\infty)$ とし，$L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ を

$$L_{q_jq_k} := \begin{cases} R^{-1}_{j\vee k} & (|j-k| = 1),\\ 0 & (|j-k| \geq 2),\end{cases} \qquad j,k \in \{0,1,\dots,n\},\ j \neq k$$

により定める．このとき $[L]_{\{q_0,q_n\}} = \bigl(\sum_{j=1}^n R_j\bigr)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ．



(V, L)　　　$(\{q_0, q_n\}, [L]_{\{q_0,q_n\}})$

図 2.1: 直列回路の合成抵抗（演習 2.1）

以下に $L \in \mathcal{LA}(V)$ に関する調和関数の基本性質を挙げる．注意 2.9-(1) 同様，これらの事実も $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian に対してはよく知られたものである．

定理 2.11 (強最大値の原理). V を有限集合とし，$U \subsetneqq V, U \neq \emptyset$ とする．$L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V), x \in V\setminus U$ とし，$W^x_L \subset V\setminus U, U^x_L \subset U$ を次で定める：

$$W^x_L := \{x\} \cup \left\{ y \in V\setminus U \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \text{ と } \{x_k\}_{k=0}^n \subset V\setminus U \text{ が存在して，} x_0 = x,\\ x_n = y, \text{任意の } k \in \{1,\dots,n\} \text{ に対し } L_{x_{k-1}x_k} > 0 \end{array}\right\},$$
$$U^x_L := \{y \in U \mid \text{ある } z \in W^x_L \text{ に対し } L_{yz} > 0\}. \tag{2.18}$$

(1) $U^x_L \neq \emptyset$ であり，任意の $y \in W^x_L$ に対し $\{z \in V \mid L_{yz} > 0\} \subset W^x_L \cup U^x_L$.
(2) $u \in \mathbb{R}^{W^x_L \cup U^x_L}$ とし，(1) より $(Lu)(y) = \sum_{z\in V, L_{yz}>0} L_{yz}(u(z)-u(y))$ が $y \in W^x_L$ に対し自然に定義されることに注意して $Lu|_{W^x_L} = 0$ と仮定する．このとき

$$\min_{q\in U^x_L} u(q) \leq \min_{q\in W^x_L} u(q) \leq \max_{q\in W^x_L} u(q) \leq \max_{q\in U^x_L} u(q). \tag{2.19}$$

さらに，$\max_{q\in W^x_L} u(q) = \max_{q\in U^x_L} u(q)$ または $\min_{q\in W^x_L} u(q) = \min_{q\in U^x_L} u(q)$ であるためには $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W^x_L \cup U^x_L}$ であることが必要十分である．

証明. まず W_L^x の定義から容易に分かるように，$y, z \in V \setminus U$ に対し $z \in W_L^y$ のとき $y \sim_{(V\setminus U, L)} z$ と定めると $\sim_{(V\setminus U, L)}$ は $V \setminus U$ 上の同値関係であることを注意しておく．特に $y \in V \setminus U$ に対し W_L^y は $\sim_{(V\setminus U, L)}$ に関する y の同値類であるので，$W_L^x \cap W_L^y \neq \emptyset$ ならば $W_L^x = W_L^y$ であり，従ってまた $U_L^x = U_L^y$ である．
(1) $y \in U$ を取る．(RN2) より $n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ が存在して $x_0 = x, x_n = y$ かつ任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $L_{x_{k-1}x_k} > 0$. $l := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in U\}$ とおくと $\{x_k\}_{k=0}^{l-1} \subset V \setminus U, x_l \in U$ であるので $\{x_k\}_{k=0}^{l-1} \subset W_L^x, x_l \in U_L^x \neq \emptyset$.

次に $y \in W_L^x$ とし $z \in V, L_{yz} > 0$ とすると (2.18) により，$z \in U$ ならば $z \in U_L^x$ であり，$z \in V \setminus U$ ならば $z \in W_L^y = W_L^x$ となるので $\{z \in V \mid L_{yz} > 0\} \subset W_L^x \cup U_L^x$.
(2) $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ ならば (2.19) の 4 辺は全て等しい．また，$\max_{q\in W_L^x} u(q) < \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q)$ ならば $\max_{q\in W_L^x} u(q) < \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q) = \max_{q\in U_L^x} u(q)$. あとは $\max_{q\in W_L^x} u(q) = \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q)$ と仮定し $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ を導けば，$\max_{q\in W_L^x} u(q) \leq \max_{q\in U_L^x} u(q)$ 及びこの等号の成立が $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ の場合に限ることが分かり，$\min_{q\in U_L^x} u(q) \leq \min_{q\in W_L^x} u(q)$ に対する同様の議論と合わせて証明が完了する．そこで $\max_{q\in W_L^x} u(q) = \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q)$ と仮定し，$u(x_*) = \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q)$ を満たす $x_* \in W_L^x$ を取る．このとき $W_L^{x_*} = W_L^x$ なので，$y \in (W_L^x \cup U_L^x) \setminus \{x_*\}$ とすると，$n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^{n-1} \subset V \setminus U$ が存在して，$x_0 = x_*$, かつ $x_n := y$ とおくと任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $L_{x_{k-1}x_k} > 0$. $u(x_0) = u(x_*) = \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q)$ に注意して，$k \in \{1, \ldots, n\}$ とし $x_{k-1} \in W_L^x \cup U_L^x$ かつ $u(x_{k-1}) = u(x_*)$ と仮定すると，$x_{k-1} \in V \setminus U$ より $x_{k-1} \in W_L^x$ であり，すると (1) より $x_k \in \{z \in V \mid L_{x_{k-1}z} > 0\} \subset W_L^x \cup U_L^x$ であるので

$$
\begin{aligned}
0 = (Lu)(x_{k-1}) &= \sum\nolimits_{z\in V,\, L_{x_{k-1}z}>0} L_{x_{k-1}z}(u(z) - u(x_{k-1})) \\
&\leq L_{x_{k-1}x_k}(u(x_k) - u(x_*)) \leq 0
\end{aligned}
$$

となり，よって $u(x_k) = u(x_*)$. 従って k に関する数学的帰納法により $u(y) = u(x_n) = u(x_*)$ となり，$y \in (W_L^x \cup U_L^x) \setminus \{x_*\}$ は任意なので $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$. □

系 2.12 (楕円型 Harnack 不等式)**.** V を有限集合とし，$U \subsetneq V$, $U \neq \emptyset$ とする．$L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V), x \in V \setminus U$ とし W_L^x, U_L^x を (2.18) で定める．このとき $c \in (0, \infty)$ が存在して，$u \geq 0$ と $Lu|_{W_L^x} = 0$ を満たす任意の $u \in \mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x}$ に対し

$$
c \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q) \leq \min_{q\in W_L^x} u(q). \tag{2.20}
$$

証明. $\mathcal{A} := \left\{u \in \mathbb{R}^{W_L^x\cup U_L^x} \;\middle|\; u \geq 0, Lu|_{W_L^x} = 0, \max_{q\in W_L^x\cup U_L^x} u(q) = 1\right\}$ とおく．$\mathbf{1}_{W_L^x\cup U_L^x} \in \mathcal{A}$ より $\mathcal{A} \neq \emptyset$ であり，定理 2.11 より $\min_{q\in W_L^x} u(q) > 0$ が任意の $u \in \mathcal{A}$ に対して成り立つ．そこで $c := \inf\left\{\min_{q\in W_L^x} u(q) \;\middle|\; u \in \mathcal{A}\right\}$ とおくと，$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^{W_L^x\cup U_L^x}$ の空でないコンパクト部分集合で $\mathcal{A} \ni u \mapsto \min_{q\in W_L^x} u(q) \in \mathbb{R}$ は連続なので $c = \min\left\{\min_{q\in W_L^x} u(q) \;\middle|\; u \in \mathcal{A}\right\} \in (0, \infty)$ となり，すると $u \geq 0$ と $Lu|_{W_L^x} = 0$ を満たす $u \in \mathbb{R}^{W_L^x\cup U_L^x}$ に対し c の定義より容易に (2.20) を得る． □

次に定義する有効抵抗距離の概念は抵抗形式の理論の根幹に位置しており，極めて重要である．

定義 2.13 (有限集合上の有効抵抗距離)**.** V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V)$ とする．$R_L : V \times V \to [0, \infty)$ を

$$
R_L(x, y) := \left(\min\{\mathcal{E}_L(u, u) \mid u \in \mathbb{R}^V, u(x) = 1, u(y) = 0\}\right)^{-1} \tag{2.21}
$$

$$= \max\left\{ \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}_L(u,u)} \,\middle|\, u \in \mathbb{R}^V \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_V \right\} \tag{2.22}$$

（ただし $\min\emptyset := \infty, \infty^{-1} := 0, \max\emptyset := 0$）で定める．$R_L$ を L に対応する**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) という．

$x = y$ のときは (2.21), (2.22) の右辺は明らかに共に 0 となる．$x \neq y$ のとき，(2.21) の最小値が存在して正であることは定理 2.8 から分かり，(2.22) の最大値が存在して (2.21) の右辺に等しいことは，$u \in \mathbb{R}^V \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ に対し $u(x) \neq u(y)$ ならば

$$\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}_L(u,u)} = \mathcal{E}_L\left(\frac{u-u(y)}{u(x)-u(y)}, \frac{u-u(y)}{u(x)-u(y)} \right)^{-1} \leq R_L(x,y) \tag{2.23}$$

であり，さらに (2.21) の最小値を達成する $u \in \mathbb{R}^V$ に対して (2.23) の不等式で等号が成立することから分かる．すると特に (2.22) から次の不等式が得られる．

命題 2.14. V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V)$ とするとき，任意の $u \in \mathbb{R}^V$ と任意の $x, y \in V$ に対し

$$|u(x)-u(y)|^2 \leq R_L(x,y)\mathcal{E}_L(u,u). \tag{2.24}$$

注意 2.15. $x, y \in V, x \neq y$ のとき，定理 2.8-(2) から次が成り立つことが分かる：

$$[L]_{\{x,y\}} = \frac{1}{R_L(x,y)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

注意 2.9-(2) によれば $[L]_{\{x,y\}}$ は「(V, L) を 2 点 x, y 間の単一の抵抗器と見なした『合成抵抗』網」を表していると解釈することができるが，(2.25) はその「合成抵抗」網が 2 点 x, y を抵抗値 $R_L(x,y)$ の抵抗器で接続して得られる抵抗網であることを示している．$R_L(x,y)$ を「有効抵抗」と呼ぶのはこの解釈に基づいている．

その名称が示唆する通り，有効抵抗距離 R_L は実は距離関数になっている．さらに R_L によって Laplacian L は一意的に定まる．これを次に定理として述べる．

定理 2.16. V を空でない有限集合とする．
(1) $L \in \mathcal{LA}(V)$ とするとき，R_L は V 上の距離関数である．
(2) $L_1, L_2 \in \mathcal{LA}(V)$ が $R_{L_1} = R_{L_2}$ を満たすならば $L_1 = L_2$ である．

定理 2.16 の証明の前に，定理 2.16-(2) の重要な系を 1 つ述べておく．

定義 2.17. $k = 1, 2$ に対し V_k を空でない有限集合，$L_k \in \mathcal{LA}(V_k)$ とする．$V_1 \subset V_2$ かつ $L_1 = [L_2]_{V_1}$ であるとき $\{(V_1, L_1), (V_2, L_2)\}$ は**適合**している (compatible) といい，この性質が成り立つことを $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ と書き表す．

系 2.18. $k = 1, 2$ に対し V_k を空でない有限集合，$L_k \in \mathcal{LA}(V_k)$ とする．このとき，$(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ であるためには $V_1 \subset V_2$ かつ $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ であることが必要十分である．

証明. $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ ならば，$V_1 \subset V_2$ であり，また $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V_1$ に対し命題 2.10 より $[L_1]_{\{x,y\}} = [[L_2]_{V_1}]_{\{x,y\}} = [L_2]_{\{x,y\}}$, 従って (2.25) より $R_{L_1}(x,y) = R_{L_2}(x,y)$ となるので $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ である．

逆に $V_1 \subset V_2$ かつ $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ ならば，前段落の結果から $R_{[L_2]_{V_1}} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ であるので $R_{L_1} = R_{[L_2]_{V_1}}$ となり，従って定理 2.16-(2) より $L_1 = [L_2]_{V_1}$, すなわち $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ である．□

以下，本節の残りで定理 2.16 の証明を与える．系 2.18 の必要性の主張は，上で（定理 2.8 の結果及び）命題 2.10 と (2.25) のみを用いて証明され，従って定理 2.16 には依存していないので定理 2.16 の証明の中で用いてもよいことに注意する．

定理 2.16 の証明のために補題を 2 つ準備する．初めの補題は有効抵抗距離の計算や有限集合上の Laplacian の適合性の証明に頻繁に用いられる．

補題 2.19 (Δ-Y 変換 (Δ-Y transform)). $V = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ を $\#V = 4$ であるような集合，$U := \{q_1, q_2, q_3\}$ とし，$L_\Delta = (L_{xy})_{x,y \in U} \in \mathcal{LA}(U)$ は $L_{q_1q_2}, L_{q_2q_3}, L_{q_3q_1} \in (0, \infty)$ を満たすとする．このとき，$L_* := L_{q_3q_1}L_{q_1q_2} + L_{q_1q_2}L_{q_2q_3} + L_{q_2q_3}L_{q_3q_1}$,

$$\check{L}_{q_0q_j} := \frac{L_*}{L_{q_kq_l}}, \quad \check{L}_{q_kq_l} := 0, \quad j \in \{1,2,3\}, \{k,l\} = \{1,2,3\} \setminus \{j\} \tag{2.26}$$

により $L_Y := (\check{L}_{xy})_{x,y \in V} \in \mathcal{LA}(V)$ を定めると，$L_\Delta = [L_Y]_U$（下の図 2.2 参照）．

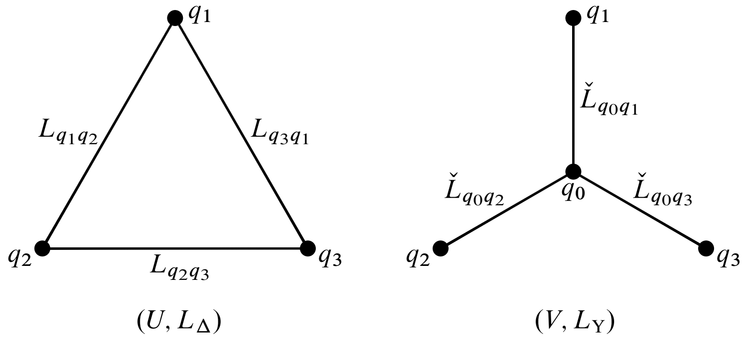


図 2.2: Δ-Y 変換（補題 2.19）

演習 2.2. 補題 2.19 を示せ．

演習 2.3. $V_1 = \{q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3\}$ を $\#V_1 = 6$ を満たす集合，$V_0 := \{q_1, q_2, q_3\}$ とし，$L_0 = (L^0_{xy})_{x,y \in V_0} \in \mathcal{LA}(V_0)$ 及び $L_1 = (L^1_{xy})_{x,y \in V_1} \in \mathcal{LA}(V_1)$ を

$$L^0_{q_jq_k} := \frac{3}{5}, \ L^1_{q_jp_k} := L^1_{p_jp_k} := 1, \ L^1_{q_jp_j} := L^1_{q_jq_k} := 0, \ j,k \in \{1,2,3\}, \ j \neq k$$

により定める（下の図 2.3 参照）．このとき $[L_1]_{V_0} = L_0$ であることを補題 2.19 を用いて示せ．

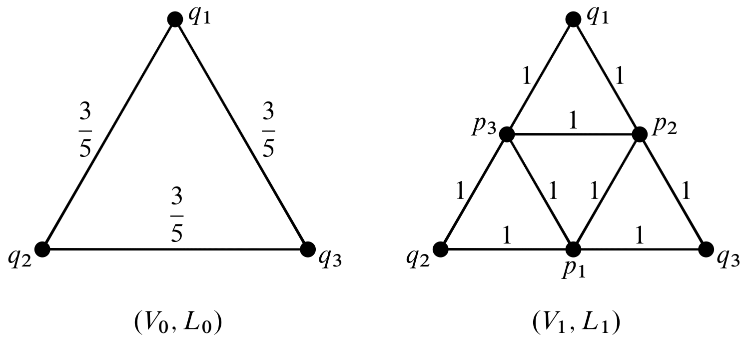


図 2.3: 演習 2.3 の図

補題 2.20. V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V), z \in V$ とし，$g_z^L : V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$g_z^L(x,y) := \frac{R_L(x,z) + R_L(y,z) - R_L(x,y)}{2}, \quad x, y \in V \tag{2.27}$$

で定める．このとき各 $x \in V$ に対し $v_x := g_z^L(x,\cdot)$ は $v_x(z) = 0$ かつ任意の $u \in \mathbb{R}^V$ について $\mathcal{E}_L(u, v_x) = u(x) - u(z)$ となるような唯 1 つの $\mathbb{R}^V$ の元であり，さらに任意の $x, y \in V$ に対し $0 \le g_z^L(x,y) = g_z^L(y,x) \le g_z^L(x,x)$.

注意 2.21. V を $\#V \ge 2$ であるような有限集合とし，$L \in \mathcal{LA}(V), z \in V$ とする．補題 2.20 から特に，$u \in \mathbb{R}^V$ が $u(z) = 0$ を満たすならば任意の $x \in V$ に対し

$$\begin{aligned} u(x) = \mathcal{E}_L\bigl(g_z^L(x,\cdot), u\bigr) = \bigl\langle g_z^L(x,\cdot), -Lu\bigr\rangle_V &= \sum\nolimits_{y \in V \setminus \{z\}} g_z^L(x,y)(-Lu)(y) \\ &= \bigl\langle g_z^L(x,\cdot)|_{V\setminus\{z\}}, -X_{\{z\}}(u|_{V\setminus\{z\}})\bigr\rangle_{V\setminus\{z\}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

（$X_{\{z\}}$ は補題 2.7 で $U = \{z\}$ として得られる $\mathbb{R}^{(V\setminus\{z\})\times(V\setminus\{z\})}$ の元）となる．(2.28) は，Dirichlet 境界条件 $u(z) = 0$ の下での Laplacian $X_{\{z\}}$ の逆作用素 $(-X_{\{z\}})^{-1}$ が，g_z^L を積分核とする積分作用素で与えられることを示している．これと同様に，Euclid 空間，Riemann 多様体，フラクタル等の空間上で定義された Laplacian に対し，その Dirichlet 境界条件の下での逆作用素は（ほとんどの場合）積分作用素として表せることが知られており，そのときの積分核は一般に **Green 関数**と呼ばれる．(2.28) によれば，g_z^L は「z を境界とする，Laplacian L に対応する Green 関数」に他ならず，補題 2.20 はそれが有効抵抗距離 R_L を用いて (2.27) のように具体的に表示できることを主張している．

補題 2.20 の証明. まず (2.22) より R_L は対称，すなわち任意の $x, y \in V$ に対し $R_L(x,y) = R_L(y,x)$ であり，従ってまた $g_z^L(x,y) = g_z^L(y,x)$ であることを注意しておく．

$x \in V$ とする．主張の v_x と同じ性質を $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^V$ が持つとすると，$u := v_1 - v_2$ として $\mathcal{E}_L(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = \mathcal{E}_L(u, v_1) - \mathcal{E}_L(u, v_2) = 0$ なので (RF1)$_{\mathrm{fin}}$ より $v_1 - v_2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ となり，これと $v_1(z) - v_2(z) = 0$ から $v_1 = v_2$ が従う．

明らかに $v_x(z) = 0 \le R_L(x,z) = v_x(x)$ である．$x = z$ のときは R_L の対称性より $v_z = g_z^L(z,\cdot) = 0$ であり，この関数は $v_z(z) = 0$ かつ任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_L(u, v_z) = u(z) - u(z)\ (= 0)$ を満たす．そこで以下 $x \ne z$ と仮定する．初めに $0 \le v_x|_{V\setminus\{x,z\}} \le v_x(x), Lv_x|_{V\setminus\{x,z\}} = 0$ であることを示そう．注意 2.9-(1) より後者は $v_x = h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})$ と同値であり，また $y \in V \setminus \{x,z\}$ に対し命題 2.10 より

$$h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})(y) = \bigl(h^L_{\{x,y,z\}} \circ h^{[L]_{\{x,y,z\}}}_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})\bigr)(y) = h^{[L]_{\{x,y,z\}}}_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})(y)$$

であるので，$y \in V \setminus \{x,z\}$ とし $0 \le v_x(y) \le v_x(x), v_x(y) = h^{[L]_{\{x,y,z\}}}_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})(y)$ を示せばよい．後者は再び注意 2.9-(1) により $\bigl([L]_{\{x,y,z\}}(v_x|_{\{x,y,z\}})\bigr)(y) = 0$ と同値であるので，$U := \{x,y,z\}, L_\Delta = (L_{x'y'})_{x',y' \in U} := [L]_U, v := v_x|_U$ として $0 \le v(y) \le v(x), (L_\Delta v)(y) = 0$ を示せばよいことになる．

まず $L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} \in (0,\infty)$ と仮定する．U に属さない元 q を 1 つ取り，補題 2.19 にある通り $L_{\mathrm{Y}} := (\check{L}_{x'y'})_{x',y' \in \{q\}\cup U} \in \mathcal{LA}(\{q\} \cup U)$ を $L_* := L_{zx}L_{xy} + L_{xy}L_{yz} + L_{yz}L_{zx}$ と (2.26) で定める．系 2.18 の必要性の主張から $R_L|_{U\times U} = R_{L_\Delta} = R_{L_{\mathrm{Y}}}|_{U\times U}$ であり，$(\{q\}\cup U, L_{\mathrm{Y}})$ の構造（図 2.2 右）から容易に $R_{L_{\mathrm{Y}}}(x,y) = \check{L}_{qx}^{-1} + \check{L}_{qy}^{-1}, R_{L_{\mathrm{Y}}}(y,z) = \check{L}_{qy}^{-1} + \check{L}_{qz}^{-1}, R_{L_{\mathrm{Y}}}(z,x) = \check{L}_{qz}^{-1} + \check{L}_{qx}^{-1}$ を得る．すなわち

$$R_L(x,y) = \frac{L_{yz} + L_{zx}}{L_*}, \quad R_L(y,z) = \frac{L_{zx} + L_{xy}}{L_*}, \quad R_L(z,x) = \frac{L_{xy} + L_{yz}}{L_*}. \tag{2.29}$$

すると (2.27), (2.29) より $v(z)=0<\frac{L_{xy}}{L_*}=v(y)<\frac{L_{xy}+L_{yz}}{L_*}=R_L(x,z)=v(x)$ となり，これより $(L_\Delta v)(y)=L_{xy}(v(x)-v(y))+L_{yz}(v(z)-v(y))=0$ を得る．

次に $L_{xy},L_{yz},L_{zx}\in(0,\infty)$ が不成立の場合を考える．このとき $L_\Delta\in\mathcal{LA}(U)$ より L_{xy},L_{yz},L_{zx} のうち 1 つは 0 で他の 2 つは正である．$v(z)=0$ に注意する．

$L_{xy}=0$ のときは $v(x)=R_L(x,z)=L_{zx}^{-1}$, $R_L(y,z)=L_{yz}^{-1}$, $R_L(x,y)=L_{yz}^{-1}+L_{zx}^{-1}$, $v(y)=0=v(z)<v(x)$ となり，$(L_\Delta v)(y)=L_{yz}(v(z)-v(y))=0$.

$L_{yz}=0$ のときは $v(x)=R_L(x,z)=L_{zx}^{-1}$, $R_L(y,z)=L_{zx}^{-1}+L_{xy}^{-1}$, $R_L(x,y)=L_{xy}^{-1}$, $v(y)=L_{zx}^{-1}=v(x)>0$ となり，$(L_\Delta v)(y)=L_{xy}(v(x)-v(y))=0$.

$L_{zx}=0$ のときは $v(x)=R_L(x,z)=L_{xy}^{-1}+L_{yz}^{-1}$, $R_L(y,z)=L_{yz}^{-1}$, $R_L(x,y)=L_{xy}^{-1}$, $v(y)=L_{yz}^{-1}$ となり，$(L_\Delta v)(y)=L_{xy}(v(x)-v(y))+L_{yz}(v(z)-v(y))=0$, また $0<v(y)<v(x)$.

以上で $0\leq v(y)\leq v(x)$, $(L_\Delta v)(y)=0$ が分かり，$0\leq v_x|_{V\setminus\{x,z\}}\leq v_x(x)$, $Lv_x|_{V\setminus\{x,z\}}=0$ であることが示せた．前者は $0\leq g_z^L(x,y)\leq g_z^L(x,x)$ が任意の $y\in V$ に対して成り立つことを意味している．今 $u\in\mathbb{R}^V$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_L(u,v_x)&=\langle u,-Lv_x\rangle_V=\big\langle h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}),-Lv_x\big\rangle_V=\mathcal{E}_L\big(h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}),v_x\big)\\
&=\mathcal{E}_L\big(h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}),h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})\big)=\mathcal{E}_{[L]_{\{x,z\}}}(u|_{\{x,z\}},v_x|_{\{x,z\}})\\
&=R_L(x,z)^{-1}(u(x)-u(z))(v_x(x)-v_x(z))=u(x)-u(z).
\end{aligned}
$$

ただし 2 つ目の等号に $Lv_x|_{V\setminus\{x,z\}}=0$ を，4 つ目の等号に $v_x=h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})$ を，5 つ目の等号に $\mathcal{E}_L,\mathcal{E}_{[L]_{\{x,z\}}}$ の対称双線型性，$h^L_{\{x,z\}}$ の線型性と (2.15) を，6 つ目の等号に (2.25) を，最後の等号に $v_x(z)=0$ と $v_x(x)=R_L(x,z)$ を，それぞれ用いた．これで $v_x=g_z^L(x,\cdot)$ が主張の性質を持つことが示せた． □

定理 2.16 の証明. (1) (2.22) より $x,y\in V$ に対し，$R_L(x,y)=R_L(y,x)$ であり，また $x=y$ なら $R_L(x,y)=0$, $x\neq y$ なら $R_L(x,y)>0$ である．さらに補題 2.20 より $x,y,z\in V$ に対し $g_z^L(x,y)\geq 0$, すなわち $R_L(x,y)\leq R_L(x,z)+R_L(z,y)$.
(2) $z\in V$ を取る．$R_{L_1}=R_{L_2}$ と (2.27) より $g_z^{L_1}=g_z^{L_2}$ であることに注意し，各 $x\in V\setminus\{z\}$ に対し $v_x:=g_z^{L_1}(x,\cdot)=g_z^{L_2}(x,\cdot)$ とおく．このとき $\{\mathbf{1}_V\}\cup\{v_x\}_{x\in V\setminus\{z\}}\subset\mathbb{R}^V$ は線型独立であり，従って $\mathbb{R}^V$ の基底を成す．実際，$(a_x)_{x\in V}\in\mathbb{R}^V$ とし $u:=a_z\mathbf{1}_V+\sum_{x\in V\setminus\{z\}}a_xv_x$ とおくと，$y\in V\setminus\{z\}$ と $k\in\{1,2\}$ に対し

$$
\mathcal{E}_{L_k}(u,\mathbf{1}_y)=\sum_{x\in V\setminus\{z\}}a_x\mathcal{E}_{L_k}(v_x,\mathbf{1}_y)=\sum_{x\in V\setminus\{z\}}a_x(\mathbf{1}_y(x)-\mathbf{1}_y(z))=a_y \tag{2.30}
$$

であり，また $u(z)=a_z$ であるので，$u=0$ ならば $(a_x)_{x\in V}=0$ である．そこで今 $u\in\mathbb{R}^V$ を任意に取り $u=a_z\mathbf{1}_V+\sum_{x\in V\setminus\{z\}}a_xv_x$ となる $(a_x)_{x\in V}\in\mathbb{R}^V$ を取ると，$y\in V\setminus\{z\}$ に対し (2.30) より $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_y)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_y)$ であり，さらにこれと $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_V)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_V)=0$ より $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_z)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_z)$. よって任意の $v\in\mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_{L_1}(u,v)=\sum_{x\in V}v(x)\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_x)=\sum_{x\in V}v(x)\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_x)=\mathcal{E}_{L_2}(u,v)$ であるので $\mathcal{E}_{L_1}=\mathcal{E}_{L_2}$, 従ってまた $L_1=L_{\mathcal{E}_{L_1}}=L_{\mathcal{E}_{L_2}}=L_2$ となる． □

2.2 有限集合上の Laplacian の適合列とその極限

有限集合上の抵抗形式及び Laplacian に関する前節の結果を受けて，本節では有限集合上の Laplacian の適合列の概念を導入し，その自然な「帰納極限」の基本性質を調べる．

有限集合上の Laplacian の適合列とその自然な「帰納極限」は次で定義される．

定義 2.22 (有限集合上の Laplacian の適合列とその極限)．各 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し V_m を空でない有限集合，$L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ とし，$\mathcal{S} := \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ とおく．任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $(V_m, L_m) \leq (V_{m+1}, L_{m+1})$ が成り立つとき，$\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の**適合列** (compatible sequence) であるという．さらに $\mathcal{S}$ が有限集合上の Laplacian の適合列であるとき，$V_* := V_*(\mathcal{S}) := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ とし

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \{u \in \mathbb{R}^{V_*} \mid \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty\}, \tag{2.31}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u, v) := \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, v|_{V_m}) \in \mathbb{R}, \quad u, v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \tag{2.32}$$

$$R_{\mathcal{S}}(x, y) := R_{L_m}(x, y), \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ x, y \in V_m, \tag{2.33}$$

により $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^{V_*}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}} : \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$, $R_{\mathcal{S}} : V_* \times V_* \to [0, \infty)$ を定める．

ここで任意の $u \in \mathbb{R}^{V_*}$ に対し (2.15) より $\{\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m})\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset [0, \infty)$ は非減少で，従って極限 $\lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) \in [0, \infty]$ を持つことを (2.31) において用いた．さらにこのとき (2.8) より $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は $\mathbb{R}^{V_*}$ の線型部分空間であり，すると $\mathcal{E}_{L_m}$ の対称双線型性により (2.32) の極限の存在が保証され $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ もまた非負定値対称双線型であることに注意する．また $m \leq n$ なる任意の $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，命題 2.10 より帰納的に $(V_m, L_m) \leq (V_n, L_n)$ であり，従って系 2.18 の必要性の主張から $R_{L_n}|_{V_m \times V_m} = R_{L_m}$ であるので，$x, y \in V_*$ に対し $R_{\mathcal{S}}(x, y) := R_{L_m}(x, y)$ は $x, y \in V_m$ を満たす $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ の取り方に依らずに定まり，さらに定理 2.16-(1) より $R_{\mathcal{S}}$ は V_* 上の距離関数である．

以下本節では $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とする．定理 2.8 と同様に，V_m 上の関数に対してはその「$(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ に関する V_* 上への調和拡張」が唯 1 つ存在する．すなわち次の命題が成り立つ．

命題 2.23. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．$u \in \mathbb{R}^{V_m}$ に対し，命題 2.10 より $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n_1 \leq n_2$ ならば $h_{V_m}^{L_{n_1}}(u) = h_{V_m}^{L_{n_2}}(u)\big|_{V_{n_1}}$ であることに注意して，$h_{V_m}(u) = h_{V_m}^{\mathcal{S}}(u) \in \mathbb{R}^{V_*}$ を $n \geq m$ なる $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $h_{V_m}(u)|_{V_n} := h_{V_m}^{L_n}(u)$ で定める．このとき各 $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ に対し，$h_{V_m}(u)$ は

$$v|_{V_m} = u \quad \text{かつ} \quad n > m \text{ なる任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } L_n(v|_{V_n})|_{V_n \setminus V_m} = 0 \tag{2.34}$$

を満たす唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^{V_*}$ であり，かつ最小値 $\min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v)$ を達成する唯 1 つの $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ であって

$$\mathcal{E}_{L_m}(u, u) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(h_{V_m}(u), h_{V_m}(u)) = \min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v). \tag{2.35}$$

さらに $h_{V_m} : \mathbb{R}^{V_m} \to \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型写像である．

証明. $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ とする．$h_{V_m}(u)$ が (2.34) を満たす唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^{V_*}$ であることは注意 2.9-(1) から分かる．また (2.15) から $n \geq m$ なる任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$\mathcal{E}_{L_n}(h_{V_m}(u)|_{V_n}, h_{V_m}(u)|_{V_n}) = \mathcal{E}_{L_n}\big(h_{V_m}^{L_n}(u), h_{V_m}^{L_n}(u)\big) = \mathcal{E}_{[L_n]_{V_m}}(u, u) = \mathcal{E}_{L_m}(u, u)$$

であるので，これより $h_{V_m}(u) \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ かつ $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(h_{V_m}(u), h_{V_m}(u)) = \mathcal{E}_{L_m}(u, u)$. さらに $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が $v|_{V_m} = u$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v) \leq \mathcal{E}_{L_m}(u, u)$ を満たすならば，$n \geq m$ なる任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\mathcal{E}_{L_m}(u, u) \leq \mathcal{E}_{L_n}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v)$, 従って $\mathcal{E}_{L_n}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) = \mathcal{E}_{L_m}(u, u) = \min_{w \in \mathbb{R}^{V_n}, w|_{V_m} = u} \mathcal{E}_{L_n}(w, w)$ となり，よって定理 2.8-(1) の一意性の主張から $v|_{V_n} = h_{V_m}^{L_n}(u)$, すなわち $v = h_{V_m}(u)$ を得る．ゆえに $\mathcal{E}_{L_m}(u, u) = \min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, v|_{V_m} = u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v, v)$ であり，かつこの最小値は $v = h_{V_m}(u)$ においてのみ達成される．最後に h_{V_m} の線型性は各 $h_{V_m}^{L_n}$ の線型性から従う．　□

有限集合上の Laplacian の場合と同様に，$R_{\mathcal{S}}$ は次に述べるように $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ から決まる「有効抵抗」として特徴付けられる．定義 2.22 と $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ から容易に分かるように，$\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ であることを注意しておく．

補題 2.24. 任意の $x, y \in V_*$ に対し

$$R_{\mathcal{S}}(x,y) = \bigl(\min\{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) \mid u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, u(x) = 1, u(y) = 0\}\bigr)^{-1} \tag{2.36}$$

$$= \max\left\{ \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u)} \,\middle|\, u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*} \right\} \tag{2.37}$$

（ただし $\min\emptyset := \infty, \infty^{-1} := 0, \max\emptyset := 0$）であり，さらに任意の $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \le R_{\mathcal{S}}(x,y)\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u). \tag{2.38}$$

証明. $x = y$ のときはどの主張も明らかなので，$x \ne y$ と仮定してよい．$x, y \in V_m$ となる $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ をとると，$u(x) = 1, u(y) = 0$ を満たす任意の $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ に対し $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) \ge \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) \ge R_{L_m}(x,y)^{-1} = R_{\mathcal{S}}(x,y)^{-1}$ であり，また $u = h_{V_m} \circ h^{L_m}_{\{x,y\}}(\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x)$ のときこの等号が成立するので (2.36) が従う．(2.37) の最大値が存在して (2.36) の右辺に等しいことは (2.22) と全く同様にして示され，(2.38) は (2.37) から直ちに分かる． □

次に，$(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ がその構成から自然に有限集合上の抵抗形式と同様の性質を有し，かつ一種の完備性を持つことを見る．

定理 2.25. (1) $\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ であり，$(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ は Hilbert 空間である．
(2) V_* の任意の空でない有限部分集合 V に対し $\{u|_V \mid u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\} = \mathbb{R}^V$.
(3)（Markov 性）$u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ ならば $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \le \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u)$.

証明. (2) V を V_* の空でない有限部分集合とするとき，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $V \subset V_m$ となるように取ることができ，そこで $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $v := h_{V_m} \circ h^{L_m}_V(u)$ とおけば，$v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ かつ $v|_V = \bigl(h_{V_m} \circ h^{L_m}_V(u)|_{V_m}\bigr)|_V = h^{L_m}_V(u)|_V = u$ となり主張が従う．
(3) $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ とすると任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ より

$$\mathcal{E}_{L_m}(u^+ \wedge 1|_{V_m}, u^+ \wedge 1|_{V_m}) \le \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) \le \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) < \infty$$

であるので，$m \to \infty$ とすることで $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ と $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の定義より直ちに主張を得る．
(1) 補題 2.24 の前に注意したように，$\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ は定義 2.22 と $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ から容易に従う．すると $u, v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,v) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u + \alpha\mathbf{1}_{V_*}, v + \beta\mathbf{1}_{V_*})$ であるので $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,v)$ は u, v の定める $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ の元だけで決まることになり，よって $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ を自然に $(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}) \times (\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*})$ 上の実数値関数と見なすことができる．このとき $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ が $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ 上の内積になっていることは $\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ から容易に確認できるので，あとはこの内積の定める距離関数が完備であることを示せばよい．

そこで $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとする．$z \in V_*$ を取る．u_n の代わりに $u_n - u_n(z)$ を考えることにより任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $u_n(z) = 0$ と仮定してよい．$x \in V_*$ とすると，$k, l \in \mathbb{N}$ に対し (2.38) より

$$|u_k(x) - u_l(x)|^2 = |(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(z)|^2 \le R_{\mathcal{S}}(x,z)\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u_k - u_l, u_k - u_l)$$

なので $\lim_{k\wedge l\to\infty} |u_k(x) - u_l(x)| = 0$ となり，従って極限 $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \in \mathbb{R}$ が存在する．この $u \in \mathbb{R}^{V_*}$ に対し $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u - u_n, u - u_n) = 0$

であることを示そう．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とし，$N \in \mathbb{N}$ を $k \wedge l \geq N$ なる任意の $k,l \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u_k - u_l, u_k - u_l) \leq \varepsilon$ となるように取る．$k,l \in \mathbb{N}$ は $k \wedge l \geq N$ を満たすとし，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．このとき

$$\mathcal{E}_{L_m}((u_k - u_l)|_{V_m}, (u_k - u_l)|_{V_m}) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u_k - u_l, u_k - u_l) \leq \varepsilon. \tag{2.39}$$

ところが V_m が有限集合であることから，$\{u_n|_{V_m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^{V_m}$ において $u|_{V_m}$ に収束し，さらに $\mathcal{E}_{L_m} : \mathbb{R}^{V_m} \times \mathbb{R}^{V_m} \to \mathbb{R}$ は連続である．よって (2.39) で $l \to \infty$ とした後 $m \to \infty$ とすることで，$\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((u-u_k)|_{V_m}, (u-u_k)|_{V_m}) \leq \varepsilon$ が $k \geq N$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し成り立つことが分かる．特に $u - u_N \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, 従ってまた $u = (u - u_N) + u_N \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ であり，さらに $k \geq N$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u-u_k, u-u_k) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((u-u_k)|_{V_m}, (u-u_k)|_{V_m}) \leq \varepsilon$ であるが，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u-u_n, u-u_n) = 0$ が従う． □

定理 2.25-(1),(3) は $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ が然るべき完備性と Markov 性を有していることを，定理 2.25-(2) は $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が十分多くの関数を含んでいることを示しており，この意味で $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ は「性質の良い」双線型形式であるといえる．しかしながら，この $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ は V_* という**可算集合**上で定義された双線型形式に過ぎず，これでは自己相似フラクタル（非可算集合！）上に局所的な正則 Dirichlet 形式を構成するという我々の目標のためには不十分である．この困難は，V_* の距離関数 $R_{\mathcal{S}}$ による完備化 $K_{\mathcal{S}} := \overline{V_*}^{R_{\mathcal{S}}}$ を考え，(2.38) と下記の演習 2.4-(1) から各 $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が $K_{\mathcal{S}}$ 上の連続関数に一意的に拡張できることに注意して，$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ を自然に $\mathbb{R}^{K_{\mathcal{S}}}$ の部分空間と見なすことにより解決する．このとき完備化 $K_{\mathcal{S}}$ は一般に非可算であり，$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ を $\mathbb{R}^{K_{\mathcal{S}}}$ の部分空間と考えるときこれはもはや本節の理論の範疇には入らない．このような状況を統一的に取り扱うために，次節では $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ と同様の性質を持つ（可算とは限らない集合上の）非負定値対称双線型形式を抵抗形式として定式化し，その一般論を展開する．

演習 2.4. $(X,\rho_X), (Y,\rho_Y)$ は距離空間で (Y,ρ_Y) は完備であるとする．$Z \subset X$, $Z \neq \emptyset$ とし，$f : Z \to Y$ は（距離関数 ρ_X, ρ_Y について）一様連続であるとする．
(1) $g|_Z = f$ を満たす連続写像 $g : \overline{Z}^X \to Y$ が唯 1 つ存在することを示せ．
(2) g は（距離関数 ρ_X, ρ_Y について）一様連続であることを示せ．

2.3　一般の抵抗形式と有効抵抗距離

前節で見たように，有限集合上の Laplacian の適合列 $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ に対してはその「帰納極限」として V_* 上の非負定値対称双線型形式 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ が定まり，これは定理 2.25 で述べた性質を持つ．さらに $R_{\mathcal{S}} : V_* \times V_* \to [0,\infty)$ が $R_{\mathcal{S}}|_{V_m\times V_m} := R_{L_m}, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ により定まり，これは (2.36), (2.37) を満たす．一般にこれらの性質を満たす非負定値対称双線型形式を抵抗形式と呼ぶ．

定義 2.26 (抵抗形式)**.** K を空でない集合，$\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間とし，$\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の非負定値対称双線型形式とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が次の 4 条件を満たすとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は K 上の**抵抗形式** (resistance form) であるという：
(RF1) $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であり，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ は Hilbert 空間である．
(RF2) $x \neq y$ なる任意の $x,y \in K$ に対し，$u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq u(y)$.
(RF3) 任意の $x,y \in K$ に対し

$$R_{\mathcal{E}}(x,y) := R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(x,y) := \sup\left\{ \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}(u,u)} \,\middle|\, u \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K \right\} < \infty. \tag{2.40}$$

(RF4)（Markov 性）$u \in \mathcal{F}$ ならば $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u,u)$.

(2.40) で定義される $R_{\mathcal{E}} = R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} : K \times K \to [0,\infty)$ を抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) という．

さらに $\mathcal{RF}(K) := \{(\mathcal{E},\mathcal{F}) \mid (\mathcal{E},\mathcal{F})$ は K 上の抵抗形式 $\}$ とおく．

定理 2.25-(1) の証明と同様，上の (RF1) において $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であることから $\mathcal{E}$ は自然に $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K) \times (\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K)$ 上の実数値関数と見なされ，かつこれが $\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K$ 上の内積になっていることに注意されたい．また (RF3) から任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x,y \in K$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)\mathcal{E}(u,u). \tag{2.41}$$

V を空でない有限集合とする．$\mathcal{E}$ を定義 2.2 の意味での V 上の抵抗形式とすると $(\mathcal{E},\mathbb{R}^V)$ は定義 2.26 の意味での V 上の抵抗形式であることが，有限次元内積空間が常に Hilbert 空間であることと定義 2.13 から直ちに従う．逆に定義 2.26 の意味での V 上の抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対し $\mathcal{F} = \mathbb{R}^V$ でなければならないことは次の補題から分かる．よって有限集合に対しては定義 2.2 と定義 2.26 は一致する．

補題 2.27. K を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間で定義 2.26 の (RF2), $\{u^+ \wedge 1 \mid u \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$, 及び任意の $x \in K$ に対し $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq 0$, を満たすとする．このとき V が K の空でない有限部分集合ならば $\{u|_V \mid u \in \mathcal{F}\} = \mathbb{R}^V$.

証明. $\#V = 1$ のときは補題の主張は仮定より明らかである．

$\#V = 2$ と仮定し，$V = \{x,y\}$ とする．仮定から $u,v,w \in \mathcal{F}$ を $u(x) = v(y) = 1$, $w(x) \neq w(y)$ となるように取ることができ，$u^+ \wedge 1, v^+ \wedge 1$ を考えることにより $u(y), v(x) \in [0,1]$ と仮定してよい．補題の主張を示すためには $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ を満たす $f \in \mathcal{F}$ が存在することを示せばよく，$u(y) < 1$ のときは $(u-u(y)v)(x) = 1-u(y)v(x) > 0$, $(u-u(y)v)(y) = 0$ なので $f := \frac{u-u(y)v}{(u-u(y)v)(x)}$ とおき，$u(y) = 1$ のときは $(w-w(y)u)(x) = w(x)-w(y) \neq 0$, $(w-w(y)u)(y) = 0$ なので $f := \frac{w-w(y)u}{(w-w(y)u)(x)}$ とおけばよい．これで $\#V = 2$ の場合の主張が示せた．

次に $\#V \geq 3$ と仮定し，$x \in V$ とする．$f|_V = \mathbf{1}_x^V$ であるような $f \in \mathcal{F}$ が存在することを示せばよい．前段落の結果から各 $y \in V \setminus \{x\}$ に対し $u_y, v_y \in \mathcal{F}$ を $u_y(x) = v_y(y) = 1$, $u_y(y) = v_y(x) = 0$ となるように取ることができ，$u_y^+ \wedge 1, v_y^+ \wedge 1$ を考えることで $0 \leq u_y \leq 1, 0 \leq v_y \leq 1$ と仮定してよい．このとき $g := \sum_{y \in V\setminus\{x\}} u_y$, $h := \sum_{y \in V\setminus\{x\}} v_y$ とおくと $g(x) = \#V - 1$, $g|_{V\setminus\{x\}} \leq \#V - 2$, $h(x) = 0$, $h|_{V\setminus\{x\}} \geq 1$ であるので，$f := (g - (\#V-2)(h^+ \wedge 1))^+ \wedge 1$ とおけば $f \in \mathcal{F}$, $f|_V = \mathbf{1}_x^V$ となる．以上で補題の主張が示せた． □

$\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とするとき，補題 2.24 と定理 2.25 から $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ は $V_*(\mathcal{S}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ 上の抵抗形式であり，補題 2.24 よりその有効抵抗距離 $R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}} = R_{(\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathcal{F}_{\mathcal{S}})}$ は (2.33) で与えられる $R_{\mathcal{S}}$ に等しい．また，$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}|_{V_m \times V_m} = R_{\mathcal{S}}|_{V_m \times V_m} = R_{L_m}$, すなわち $R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}$ の有限部分集合 V_m への制限は Laplacian $L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ に対応する有効抵抗距離 R_{L_m} に一致する．この状況を踏まえ一般の集合上の有効抵抗距離を次で定義する．

定義 2.28 (有効抵抗距離)**.** K を空でない集合とし，$R : K \times K \to [0,\infty)$ とする．K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $L_V \in \mathcal{LA}(V)$ が存在して $R|_{V \times V} = R_{L_V}$ となるとき，R は K 上の**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) であるという．

さらに $\mathcal{RM}(K) := \{R \mid R$ は K 上の有効抵抗距離 $\}$ とおく．

K を空でない集合とし，$R \in \mathcal{RM}(K)$ とする．このとき定理 2.16-(1) から R は K 上の距離関数である．また定理 2.16-(2) により，K の空でない各有限部分集合 V に対し $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ となる $L_V \in \mathcal{LA}(V)$ は一意的に定まり，さらに系 2.18 により，V_1, V_2 が K の空でない有限部分集合で $V_1 \subset V_2$ ならば $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2})$.

空でない有限集合 V に対しては $\mathcal{RM}(V) = \{R_L \mid L \in \mathcal{LA}(V)\}$ であることが，系 2.18 の必要性の主張より $L \in \mathcal{LA}(V)$ と V の空でない部分集合 U に対し $R_L|_{U\times U} = R_{[L]_U}$ であることから分かる．

$\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とするとき，$R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}} \in \mathcal{RM}(V_*(\mathcal{S}))$ である．実際，V を $V_*(\mathcal{S})$ の空でない有限部分集合とすると，$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ を $V \subset V_m$ となるように取ることができ，そこで系 2.18 の必要性の主張より $R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}}|_{V\times V} = R_\mathcal{S}|_{V\times V} = (R_\mathcal{S}|_{V_m\times V_m})|_{V\times V} = R_{L_m}|_{V\times V} = R_{[L_m]_V}$.

実は，一般に K を空でない集合とするとき，K 上の抵抗形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ に対し $R_\mathcal{E} = R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \in \mathcal{RM}(K)$ であり，$\mathcal{RF}(K) \ni (\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mapsto R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \in \mathcal{RM}(K)$ は全単射，かつその逆写像は $R \in \mathcal{RM}(K)$ に $\{\mathcal{E}_{L_V} \mid V$ は K の空でない有限部分集合$\}$（L_V は $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ なる唯 1 つの $L_V \in \mathcal{LA}(V)$）の「帰納極限」を対応させることで与えられる．これを以下に系 2.34, 定理 2.36 として述べる．まず系 2.34 は，定理 2.8, 命題 2.23 の抵抗形式への一般化である次の定理から得られる．

定理 2.29. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．Y を K の空でない部分集合とし，$\mathbb{R}^Y$ の線型部分空間 $\mathcal{F}|_Y$ を $\mathcal{F}|_Y := \{v|_Y \mid v \in \mathcal{F}\}$ で定める．このとき各 $u \in \mathcal{F}|_Y$ に対し，最小値 $\min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v, v)$ が存在して唯 1 つの $h_Y(u) = h_Y^\mathcal{E}(u) = h_Y^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(u) \in \mathcal{F}$ により達成され，この $h_Y(u)$ は

$$h|_Y = u \quad \text{かつ} \quad v|_Y = 0 \text{ なる任意の } v \in \mathcal{F} \text{ に対し } \mathcal{E}(h, v) = 0 \tag{2.42}$$

を満たす唯 1 つの $h \in \mathcal{F}$ である．さらに $h_Y = h_Y^\mathcal{E} : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ は線型写像であり，

$$\mathcal{E}|_Y(u, v) := \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(v)), \quad u, v \in \mathcal{F}|_Y \tag{2.43}$$

により $\mathcal{E}|_Y : \mathcal{F}|_Y \times \mathcal{F}|_Y \to \mathbb{R}$ を定めると $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$, $R_{\mathcal{E}|_Y} = R_\mathcal{E}|_{Y\times Y}$.

証明. $z \in Y$ を取って固定する．$u \in \mathcal{F}|_Y$ とし $M_u := \inf_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v, v)$ とおく．明らかに $M_u \in [0, \infty)$ である．$v|_Y = w|_Y = u$ なる $v, w \in \mathcal{F}$ に対し，$\frac{v+w}{2} \in \mathcal{F}$, $\frac{v+w}{2}\big|_Y = u$ なので $\mathcal{E}\bigl(\frac{v+w}{2}, \frac{v+w}{2}\bigr) \geq M_u$ であり，従って

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v - w, v - w) &= 2\mathcal{E}(v, v) + 2\mathcal{E}(w, w) - \mathcal{E}(v + w, v + w) \\ &\leq 2\mathcal{E}(v, v) + 2\mathcal{E}(w, w) - 4M_u \end{aligned} \tag{2.44}$$

であることに注意する．さて，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $v_n \in \mathcal{F}$ を $v_n|_Y = u$ かつ $\mathcal{E}(v_n, v_n) \leq M_u + n^{-1}$ となるように取ると，(2.44) より $k, l \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(v_k - v_l, v_k - v_l) \leq 2(k^{-1} + l^{-1})$, 従って $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}(v_k - v_l, v_k - v_l) = 0$ となるので $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性により $h \in \mathcal{F}$ が存在して $h(z) = u(z)$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(h - v_n, h - v_n) = 0$. このとき (2.8) より $\mathcal{E}(h, h) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v_n, v_n) = M_u$ であり，また (2.41) より任意の $y \in Y$ に対し $n \in \mathbb{N}$ を任意に取ると

$$\begin{aligned} |h(y) - u(y)|^2 &= |(h - v_n)(y) - (h - v_n)(z)|^2 \\ &\leq R_\mathcal{E}(y, z)\mathcal{E}(h - v_n, h - v_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

であるので $h(y) = u(y)$, すなわち $h|_Y = u$ を得る．よって $M_u = \mathcal{E}(h, h) = \min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v, v)$ である．さらに $v \in \mathcal{F}$ が $v|_Y = u$, $\mathcal{E}(v, v) = M_u$ を満たすとすると (2.44) より $\mathcal{E}(h - v, h - v) = 0$, 従って (RF1) より $h - v \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ とな

り，$h|_Y = v|_Y = u$ より $h = v$ となる．以上で最小値 $\min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u}\mathcal{E}(v,v)$ が $h_Y(u) := h$ によってのみ達成されることが示せた．

$v \in \mathcal{F}$ が $v|_Y = 0$ を満たすとすると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $h_Y(u) + tv \in \mathcal{F}$, $(h_Y(u) + tv)|_Y = u$ なので $\mathcal{E}(h_Y(u) + tv, h_Y(u) + tv) \geq \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u))$, 従って $2t\mathcal{E}(h_Y(u), v) + t^2\mathcal{E}(v,v) \geq 0$ となり，特に任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $t = \pm 2\varepsilon$ とすれば $|\mathcal{E}(h_Y(u), v)| \leq \varepsilon\mathcal{E}(v,v)$ となるので $\mathcal{E}(h_Y(u), v) = 0$ が分かる．すなわち $h_Y(u)$ は (2.42) を満たす．さらに $w \in \mathcal{F}$ も (2.42) を満たすとすると，$w|_Y = h_Y(u)|_Y = u$ より $(w - h_Y(u))|_Y = 0$ であるので $\mathcal{E}(w - h_Y(u), w - h_Y(u)) = \mathcal{E}(w, w - h_Y(u)) - \mathcal{E}(h_Y(u), w - h_Y(u)) = 0$ となり，(RF1) より $w - h_Y(u) \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$, 従って $w = h_Y(u)$, すなわち $h_Y(u)$ は (2.42) を満たす唯 1 つの $h \in \mathcal{F}$ である．

$\mathcal{F}|_Y$ は明らかに $\mathbb{R}^Y$ の線型部分空間である．$h_Y : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ の線型性は各 $u \in \mathcal{F}|_Y$ に対する (2.42) を満たす $h = h_Y(u) \in \mathcal{F}$ の一意性から直ちに従い，するとまた $\mathcal{E}|_Y : \mathcal{F}|_Y \times \mathcal{F}|_Y \to \mathbb{R}$ が非負定値対称双線型であることも直ちに分かる．明らかに $\mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_K|_Y \in \mathcal{F}|_Y$, $h_Y(\mathbf{1}_Y) = \mathbf{1}_K$ であるので $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対する (RF1) から $\{u \in \mathcal{F}|_Y \mid \mathcal{E}|_Y(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ が得られ，また $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対する (RF2) から $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ に対する (RF2) が得られる．

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}|_Y$ が $\lim_{k\wedge l\to\infty}\mathcal{E}|_Y(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとすると，$\lim_{k\wedge l\to\infty}\mathcal{E}(h_Y(u_k) - h_Y(u_l), h_Y(u_k) - h_Y(u_l)) = 0$ なので $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性から $h \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(h - h_Y(u_n), h - h_Y(u_n)) = 0$ となり，そこで $u := h|_Y \in \mathcal{F}|_Y$ とおけば $\mathcal{E}|_Y(u - u_n, u - u_n) \leq \mathcal{E}(h - h_Y(u_n), h - h_Y(u_n))$ より $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}|_Y(u - u_n, u - u_n) = 0$ となる．よって $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ は (RF1) を満たす．

$x, y \in Y, x \neq y$ とする．$u \in \mathcal{F}|_Y \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ とすると $h_Y(u) \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ なので

$$\frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}|_Y(u,u)} = \frac{|h_Y(u)(x) - h_Y(u)(y)|^2}{\mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u))} \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)$$

であり，よって $R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y) \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)$. 逆に $v \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ とすると，$v(x) = v(y)$ ならば $\frac{|v(x)-v(y)|^2}{\mathcal{E}(v,v)} = 0 \leq R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$ であり，また $v(x) \neq v(y)$ ならば $v|_Y \in \mathcal{F}|_Y \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ かつ $\mathcal{E}(v,v) \geq \mathcal{E}|_Y(v|_Y, v|_Y) > 0$, 従って

$$\frac{|v(x) - v(y)|^2}{\mathcal{E}(v,v)} \leq \frac{|(v|_Y)(x) - (v|_Y)(y)|^2}{\mathcal{E}|_Y(v|_Y, v|_Y)} \leq R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$$

であるので，$R_{\mathcal{E}}(x,y) \leq R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$. ゆえに $R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y) = R_{\mathcal{E}}(x,y) < \infty$, すなわち $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ は (RF3) 及び $R_{\mathcal{E}|_Y} = R_{\mathcal{E}}|_{Y\times Y}$ を満たす．

$u \in \mathcal{F}|_Y$ とすると $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対する (RF4) により，$h_Y(u)^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$, 従ってまた $u^+ \wedge 1 = h_Y(u)^+ \wedge 1|_Y \in \mathcal{F}|_Y$ であり，さらに $\mathcal{E}|_Y(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(h_Y(u)^+ \wedge 1, h_Y(u)^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u)) = \mathcal{E}|_Y(u,u)$. よって $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ が (RF4) も満たすことが分かり，$(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$ が示せた． □

定理 2.29 において，(2.42) が調和性を表す条件である (2.16), (2.34) に相当することに注意されたい．すなわち，K 上の関数 $h \in \mathcal{F}$ が「$K \setminus Y$ において調和である」という概念は純粋に抵抗形式（より一般には Dirichlet 形式）$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ だけを用いて定式化できるのである．そこで次の定義をしておく．

定義 2.30. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，Y を K の空でない部分集合とする．

(1) 定理 2.29 の $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Y への**トレース** (跡, trace) という．

(2) $h \in \mathcal{F}$ とする．$v|_Y = 0$ なる任意の $v \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(h,v) = 0$ であるとき，h は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関して **Y-調和** (Y-harmonic) であるといい，どの抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関してかが文脈から明らかである場合には単に h は Y-調和であるという．定理 2.29 により，h が Y-調和であるためには $h \in h_Y(\mathcal{F}|_Y)$ であることが必要十分である．

注意 2.31. 定理 2.29 で行ったような,「調和拡張」$h_Y : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ を用いて $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Y へのトレースを (2.43) で定義するという構成は実は一般の正則 Dirichlet 形式の枠組みでも行うことができ，このとき得られるトレースもまた正則 Dirichlet 形式であり，さらに対応する確率過程が元の確率過程のあるランダムな時間変更[4]により与えられることが知られている．時間変更の理論は Dirichlet 形式の概念の強みを最大限に活用して展開される大変興味深い理論であり，同時に Dirichlet 形式を解析するための強力な道具であるが，その厳密な記述のためには極めて長大な解析的・確率論的準備が必要であり本稿では到底触れることができない．興味のある読者は時間変更の理論への入門としては [12, Section 6.2] を，より詳細な結果については [11, Chapter 5] を参照されたい．

定理 2.11 の抵抗形式への（弱い形での）一般化として，次の命題が成り立つ．

命題 2.32 (最大値の原理)**.** K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．Y を K の空でない部分集合，$u \in \mathcal{F}|_Y$ とし，u は有界，すなわち $\|u\|_\infty = \sup_{y \in Y} |u(y)| < \infty$ と仮定する．このとき任意の $x \in K$ に対し $\inf_{y \in Y} u(y) \le h_Y(u)(x) \le \sup_{y \in Y} u(y)$.

証明. $a := \inf_{y \in Y} u(y), b := \sup_{y \in Y} u(y)$ とおく．$\|u\|_\infty < \infty$ より $a, b \in \mathbb{R}, a \le b$ である．$a = b$ のときは $u = a\mathbf{1}_Y$ かつ $h_Y(u) = a\mathbf{1}_K$ なので主張は明らかに成り立つ．そこで $a < b$ と仮定し，$h := (a \vee h_Y(u)) \wedge b = a + (b-a)\bigl(\bigl(\frac{h_Y(u)-a}{b-a}\bigr)^+ \wedge 1\bigr)$ とおく．すると $h|_Y = (a \vee u) \wedge b = u$ であり，また (RF1), (RF4) より $h \in \mathcal{F}$ かつ

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(h, h) &= (b-a)^2 \mathcal{E}\left(\left(\frac{h_Y(u)-a}{b-a}\right)^+ \wedge 1, \left(\frac{h_Y(u)-a}{b-a}\right)^+ \wedge 1\right) \\
&\le (b-a)^2 \mathcal{E}\left(\frac{h_Y(u)-a}{b-a}, \frac{h_Y(u)-a}{b-a}\right) = \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u))
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

であるが，他方定理 2.29 より $\mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u)) = \min_{v \in \mathcal{F}, v|_Y = u} \mathcal{E}(v, v)$ であるので，$h|_Y = u$ と (2.45) により最小値 $\min_{v \in \mathcal{F}, v|_Y = u} \mathcal{E}(v, v)$ を h が達成することになる．ゆえに定理 2.29 の $h_Y(u)$ の一意性から $h = h_Y(u)$, すなわち $a \le h_Y(u) \le b$. □

さらに命題 2.10 の抵抗形式への一般化として，次の命題が成り立つ．

命題 2.33. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，Y, Z を $\emptyset \ne Z \subset Y$ なる K の部分集合とする．このとき $(\mathcal{E}|_Y|_Z, \mathcal{F}|_Y|_Z) = (\mathcal{E}|_Z, \mathcal{F}|_Z)$ かつ $h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y} = h_Z^{\mathcal{E}}$. 特に任意の $u \in \mathcal{F}|_Z$ に対し $h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u) = h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Y$.

証明. 明らかに $\mathcal{F}|_Y|_Z = \mathcal{F}|_Z$ である．$u \in \mathcal{F}|_Z$ とする．命題 2.10 の証明と同様に，$h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Z = h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u)|_Z = u$ に注意して定理 2.29 の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}|_Z(u, u) &= \mathcal{E}\bigl(h_Z^{\mathcal{E}}(u), h_Z^{\mathcal{E}}(u)\bigr) \\
&\ge \min_{w \in \mathcal{F}, w|_Y = h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Y} \mathcal{E}(w, w) = \mathcal{E}|_Y\bigl(h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Y, h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Y\bigr) \\
&\ge \min_{v \in \mathcal{F}|_Y, v|_Z = u} \mathcal{E}|_Y(v, v) = \mathcal{E}|_Y|_Z(u, u) = \mathcal{E}|_Y\bigl(h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u), h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u)\bigr) \\
&= \mathcal{E}\bigl(h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u), h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u)\bigr) \ge \min_{w \in \mathcal{F}, w|_Z = u} \mathcal{E}(w, w) = \mathcal{E}|_Z(u, u).
\end{aligned}
$$

よって上記の計算中の各辺は全て等しく，そこで定理 2.29 の $h_Z^{\mathcal{E}}(u)$ の一意性の主張から $h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u) = h_Z^{\mathcal{E}}(u)$ すなわち $h_Y^{\mathcal{E}} \circ h_Z^{\mathcal{E}|_Y} = h_Z^{\mathcal{E}}$ が得られ，特にこの等式の両辺の Y への制限を取ることで $h_Z^{\mathcal{E}|_Y}(u) = h_Z^{\mathcal{E}}(u)|_Y$ が従う．また $\mathcal{E}|_Y|_Z(u, u) = \mathcal{E}|_Z(u, u)$ と $\mathcal{E}|_Y|_Z, \mathcal{E}|_Z$ の対称双線型性から $\mathcal{E}|_Y|_Z = \mathcal{E}|_Z$ が分かる． □

[4] このランダムな時間変更は，元の確率過程の連続正値加法汎関数の右連続逆関数で与えられる．

系 2.34. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とする．このとき各 $x,y\in K$ に対し

$$R_{\mathcal{E}}(x,y)=\bigl(\min\{\mathcal{E}(u,u)\mid u\in\mathcal{F},u(x)=1,u(y)=0\}\bigr)^{-1} \tag{2.46}$$
$$=\max\left\{\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}(u,u)}\;\middle|\;u\in\mathcal{F}\setminus\mathbb{R}\mathbf{1}_K\right\} \tag{2.47}$$

（ただし $\min\emptyset:=\infty,\infty^{-1}:=0,\max\emptyset:=0$）であり，さらに K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $R_{\mathcal{E}}|_{V\times V}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, 従って特に $R_{\mathcal{E}}\in\mathcal{RM}(K)$.

証明. $x,y\in K$ とする．$x=y$ のときは (2.46), (2.47) は明らかである．$x\neq y$ のとき，定理 2.29 より (2.46) の最小値は存在して正であり，また (2.22) と全く同様にして (2.47) の最大値が存在して (2.46) の右辺に等しいことが分かるので，(2.40) により (2.46), (2.47) の右辺は共に $R_{\mathcal{E}}(x,y)$ に等しい．

V を K の空でない有限部分集合とすると $x,y\in V$ に対し，$x=y$ ならば $R_{\mathcal{E}}(x,y)=0=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}(x,y)$, また $x\neq y$ ならば (2.46), 定理 2.29, 命題 2.33, $\mathcal{E}|_V=\mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, (2.21) より

$$R_{\mathcal{E}}(x,y)=\mathcal{E}|_{\{x,y\}}\bigl(\mathbf{1}_x^{\{x,y\}},\mathbf{1}_x^{\{x,y\}}\bigr)^{-1}=\mathcal{E}|_V|_{\{x,y\}}\bigl(\mathbf{1}_x^{\{x,y\}},\mathbf{1}_x^{\{x,y\}}\bigr)^{-1}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}(x,y)$$

となるので，$R_{\mathcal{E}}|_{V\times V}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, 従ってまた $R_{\mathcal{E}}\in\mathcal{RM}(K)$ となる． □

系 2.35. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対し Y_n を K の空でない部分集合とする．このとき $u\in\mathcal{F}$ が $\mathcal{E}(u,u)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})$ を満たすならば $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=0$.

証明. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し (2.42) より $\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=0$, 従ってさらに (2.43) から $\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u)=\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})$ であるので，$\mathcal{E}(u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=\mathcal{E}(u,u)-\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

定理 2.36. K を空でない集合とする．
(1) $R\in\mathcal{RM}(K)$ とする．K の空でない各有限部分集合 V に対して $R|_{V\times V}=R_{L_V}$ なる（唯 1 つの）$L_V\in\mathcal{LA}(V)$ を取り，$\mathcal{F}_R\subset\mathbb{R}^K,\mathcal{E}_R:\mathcal{F}_R\times\mathcal{F}_R\to\mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_R:=\{u\in\mathbb{R}^K\mid\sup\nolimits_{V\subset K,1\leq\#V<\infty}\mathcal{E}_{L_V}(u|_V,u|_V)<\infty\}, \tag{2.48}$$
$$\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u):=\sup\nolimits_{V\subset K,1\leq\#V<\infty}\mathcal{E}_{L_V}(u|_V,u|_V)\in[0,\infty),\quad u\in\mathcal{F}_R, \tag{2.49}$$
$$\mathcal{E}_R(u,v):=\frac{1}{2}\bigl(\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u+v)-\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u)-\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(v)\bigr)\in\mathbb{R},\quad u,v\in\mathcal{F}_R \tag{2.50}$$

で定義する．このとき $(\mathcal{E}_R,\mathcal{F}_R)\in\mathcal{RF}(K)$ かつ $(R_{(\mathcal{E}_R,\mathcal{F}_R)}=:)\,R_{\mathcal{E}_R}=R$.
(2) $(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ ならば $(\mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}},\mathcal{F}_{R_{\mathcal{E}}})=(\mathcal{E},\mathcal{F})$. 特に $\mathcal{RF}(K)\ni(\mathcal{E},\mathcal{F})\mapsto R_{\mathcal{E}}\in\mathcal{RM}(K)$ 及び $\mathcal{RM}(K)\ni R\mapsto(\mathcal{E}_R,\mathcal{F}_R)\in\mathcal{RF}(K)$ は互いに逆の全単射である．

証明. (1) $\mathcal{F}_R$ が $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間であることは (2.8) より容易に分かり，従って $\mathcal{E}_R:\mathcal{F}_R\times\mathcal{F}_R\to\mathbb{R}$ を (2.50) により定義することができる．明らかに，$u\in\mathcal{F}_R$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とすると $\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(\alpha u)=\alpha^2\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u)$ なので特に $\mathcal{E}_R(u,u)=\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u)\geq 0$ であり，また $u,v\in\mathcal{F}_R$ に対し $\mathcal{E}_R(u,v)=\mathcal{E}_R(v,u)$ である．

$\mathcal{E}_R$ の双線型性を示すため，$u,v,w\in\mathcal{F}_R,\alpha\in\mathbb{R}$ とし $\mathcal{A}:=\{u,v,w,u+v,\alpha u\}$ とおく．$\varepsilon\in(0,\infty)$ を任意に取る．このとき，系 2.18 より $\emptyset\neq U\subset V$ なる K の有限部分集合 U,V に対し $L_U=[L_V]_U$ であり，従って (2.15) から各 $f\in\mathcal{F}_R$ に対し $\mathcal{E}_{L_V}(f|_V,f|_V)$ が V について単調非減少であることに注意すると，K の空

でない有限部分集合 V を任意の $h \in \mathcal{A} \cup \{f+g \mid f,g \in \mathcal{A}\}$ に対し $\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(h) - \varepsilon \leq \mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) \leq \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(h)$ となるように選べる．すると $f \in \mathcal{A}$ に対し，この不等式の $h = f, w, f+w$ の場合から容易に $|\mathcal{E}_R(f,w) - \mathcal{E}_{L_V}(f|_V, w|_V)| \leq \varepsilon$ が得られ，これを $f = u, v, u+v, \alpha u$ に対して適用し 3 角不等式を用いることで $|\mathcal{E}_R(u+v,w) - \mathcal{E}_R(u,w) - \mathcal{E}_R(v,w)| \leq 3\varepsilon$, $|\mathcal{E}_R(\alpha u, w) - \alpha\mathcal{E}_R(u,w)| \leq (|\alpha|+1)\varepsilon$ が分かる．ここで $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\mathcal{E}_R(u+v,w) = \mathcal{E}_R(u,w) + \mathcal{E}_R(v,w)$, $\mathcal{E}_R(\alpha u, w) = \alpha\mathcal{E}_R(u,w)$ となり，$\mathcal{E}_R$ の双線型性が示せた．

$(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ かつ $R_{\mathcal{E}_R} = R$ であることの証明は 2.2 節の議論に倣う．(RF1), (RF4) は $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((\cdot)|_{V_m}, (\cdot)|_{V_m})$ を $\sup_{V \subset K, 1 \leq \#V < \infty} \mathcal{E}_{L_V}((\cdot)|_V, (\cdot)|_V)$ と置き換えれば定理 2.25-(1),(3) の証明と全く同様にして示される．

U を K の空でない有限部分集合，$u \in \mathbb{R}^U$ とする．$v|_U = u$ なる任意の $v \in \mathcal{F}_R$ に対し定義より $\mathcal{E}_R(v,v) \geq \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ であることに注意する．$h|_U = u$ なる $h \in \mathcal{F}_R$ で $\mathcal{E}_R(h,h) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ を満たすものが存在する（従って $\mathcal{E}_{L_U}(u,u) = \min_{v \in \mathcal{F}_R, v|_U = u} \mathcal{E}_R(v,v)$ である）ことを示そう．$h \in \mathbb{R}^K$ を，$x \in K$ に対し $h(x) := h_U^{L_{U\cup\{x\}}}(u)(x)$ とおくことで定める．$h_U^{L_U} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^U}$ より $h|_U = u$ である．V を K の空でない有限部分集合とし $W := U \cup V$ とおくと，$x \in W$ に対し命題 2.10 より $h(x) = h_U^{L_{U\cup\{x\}}}(u)(x) = \bigl(h_{U\cup\{x\}}^{L_W} \circ h_U^{[L_W]_{U\cup\{x\}}}(u)\bigr)(x) = h_U^{L_W}(u)(x)$, すなわち $h|_W = h_U^{L_W}(u)$ であるので

$$\mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) \leq \mathcal{E}_{L_W}(h|_W, h|_W) = \mathcal{E}_{L_W}\bigl(h_U^{L_W}(u), h_U^{L_W}(u)\bigr) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u).$$

これは $\max_{V \subset K, 1 \leq \#V < \infty} \mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ を意味し，よって $h \in \mathcal{F}_R$ かつ $\mathcal{E}_R(h,h) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u) = \min_{v \in \mathcal{F}_R, v|_U = u} \mathcal{E}_R(v,v)$ となる．

$x, y \in K$, $x \neq y$ とする．前段落において特に $U := \{x,y\}$, $u := \mathbf{1}_x^{\{x,y\}}$ としたときの h を考えると，$h \in \mathcal{F}_R$, $h(x) = 1 \neq 0 = h(y)$ であるので $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ が (RF2) を満たすことが分かり，さらに

$$\frac{|h(x)-h(y)|^2}{\mathcal{E}_R(h,h)} = \mathcal{E}_{L_{\{x,y\}}}\bigl(\mathbf{1}_x^{\{x,y\}}, \mathbf{1}_x^{\{x,y\}}\bigr)^{-1} = R_{L_{\{x,y\}}}(x,y) = R(x,y). \tag{2.51}$$

他方，各 $u \in \mathcal{F}_R \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ に対し $\mathcal{E}_R(u,u) \geq \mathcal{E}_{L_{\{x,y\}}}(u|_{\{x,y\}}, u|_{\{x,y\}}) = \frac{|u(x)-u(y)|^2}{R(x,y)}$, 従って $\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}_R(u,u)} \leq R(x,y) < \infty$ であるので，(2.51) と合わせて $R_{\mathcal{E}_R}(x,y) = R(x,y) < \infty$ を得る．すなわち $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ は (RF3) を満たし，従って $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ であり，かつ $R_{\mathcal{E}_R} = R$. なおこれより特に K の任意の空でない有限部分集合 V に対し，系 2.34 から $R_{L_{\mathcal{E}_R|_V}} = R_{\mathcal{E}_R}|_{V\times V} = R|_{V\times V} = R_{L_V}$ となるので定理 2.16-(2) により $L_{\mathcal{E}_R|_V} = L_V$ でなければならないことを注意しておく．

(2) $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，$R := R_{\mathcal{E}}$ とおく．K の空でない各有限部分集合 V に対し $L_V := L_{\mathcal{E}|_V} \in \mathcal{LA}(V)$ とおく．系 2.34 により $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ であるので，$(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ はこの $\{L_V\}_{V \subset K, 1 \leq \#V < \infty}$ を用いて (2.48), (2.49), (2.50) により定義される．さらに上記 (1) の証明の最後に注意したように $L_{\mathcal{E}_R|_V} = L_V$ であり，すると任意の $u \in \mathbb{R}^V$ と $x \in K$ に対し，$h_V^{\mathcal{E}_R|_{V\cup\{x\}}} = h_V^{L_{V\cup\{x\}}} = h_V^{\mathcal{E}|_{V\cup\{x\}}}$ に注意すれば命題 2.33 より

$$\begin{aligned} h_V^{\mathcal{E}_R}(u)(x) &= \bigl(h_{V\cup\{x\}}^{\mathcal{E}_R} \circ h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)\bigr)(x) = h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)(x) \\ &= \bigl(h_{V\cup\{x\}}^{\mathcal{E}} \circ h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)\bigr)(x) = h_V^{\mathcal{E}}(u)(x) \end{aligned}$$

となるので，$h_V^{\mathcal{E}_R}(u) = h_V^{\mathcal{E}}(u)$. そこで $h_V^{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^V \to \mathcal{F}$ を以下では単に h_V で表す．特に，(2.43) を $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ 及び $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して用いることにより任意の $u, v \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_{L_V}(u,v) = \mathcal{E}_R(h_V(u), h_V(v)) = \mathcal{E}(h_V(u), h_V(v))$ であることが分かる．

まず $u \in \mathcal{F}$ とすると，定理 2.29 より K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $\mathcal{E}_{L_V}(u|_V, u|_V) \le \mathcal{E}(u,u)$, 従って $u \in \mathcal{F}_R$, $\mathcal{E}_R(u,u) \le \mathcal{E}(u,u)$. 特に $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_R$.

$u \in \mathcal{F}_R$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_{L_{V_n}}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) \ge \mathcal{E}_R(u,u) - n^{-1}$ を満たす K の空でない有限部分集合 V_n を取り $u_n := h_{V_n}(u|_{V_n})$ とおくと，$\mathcal{E}_R(u,u) - n^{-1} \le \mathcal{E}_{L_{V_n}}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) = \mathcal{E}_R|_{V_n}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) \le \mathcal{E}_R(u,u)$ であるので系 2.35 より $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(u-u_n, u-u_n) = 0$. 他方 $k,l \in \mathbb{N}$ に対し，命題 2.33 により $u_k = h_{V_k \cup V_l} \circ h_{V_k}^{L_{V_k \cup V_l}}(u|_{V_k}) = h_{V_k\cup V_l}(u_k|_{V_k\cup V_l})$, $u_l = h_{V_k\cup V_l}(u_l|_{V_k\cup V_l})$ なので $u_k - u_l = h_{V_k\cup V_l}((u_k-u_l)|_{V_k\cup V_l})$ であり，そこで前々段落の最後に述べた事実と (2.8) 及び $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_R(u-u_n,u-u_n) = 0$ から $\mathcal{E}(u_k-u_l, u_k-u_l) = \mathcal{E}_R(u_k-u_l, u_k-u_l) \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0$. よって $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性から $v \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(v-u_n, v-u_n) = 0$, 従って (2.8) より $\mathcal{E}(v,v) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)$ であるが，$n \in \mathbb{N}$ に対し前段落の結果から $v \in \mathcal{F}_R$, $\mathcal{E}_R(v-u_n, v-u_n) \le \mathcal{E}(v-u_n, v-u_n)$ なので $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_R(v-u_n,v-u_n) = 0$ でもあり，これと (2.8), $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_R(u-u_n, u-u_n) = 0$ から $\mathcal{E}_R(u-v, u-v) = 0$ となる．ゆえに (RF1) より $u - v \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K \subset \mathcal{F}$, 従って $u = (u-v) + v \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}(v,v) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_R(u_n,u_n) = \mathcal{E}_R(u,u)$ であり，前段落の結果と合わせて $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) = (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が分かる． □

定理 2.36-(2) においては上記の証明の冒頭でも注意したように，K の空でない各有限部分集合 V に対し系 2.34 より $R_{\mathcal{E}}|_{V\times V} = R_{L_{\mathcal{E}|_V}}$ であることから $(\mathcal{E}_{R_\mathcal{E}}, \mathcal{F}_{R_\mathcal{E}})$ は $\{L_{\mathcal{E}|_V}\}_{V\subset K, 1\le \#V<\infty}$ を用いて (2.48), (2.49), (2.50) により定義されるが，ここで $\mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}} = \mathcal{E}|_V$ に注意すると $(\mathcal{E},\mathcal{F}) = (\mathcal{E}_{R_\mathcal{E}}, \mathcal{F}_{R_\mathcal{E}})$ は特に次を意味することになる．

系 2.37. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とするとき，

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathbb{R}^K \mid \sup\nolimits_{V\subset K, 1\le\#V<\infty} \mathcal{E}|_V(u|_V, u|_V) < \infty\}, \tag{2.52}$$
$$\mathcal{E}(u,u) = \sup\nolimits_{V\subset K, 1\le\#V<\infty} \mathcal{E}|_V(u|_V, u|_V), \quad u \in \mathcal{F}. \tag{2.53}$$

系 2.37 から，抵抗形式について次の一連の重要な基本性質が得られる．

定理 2.38. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) $n \in \mathbb{N}$, $\{u_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$, $u : K \to \mathbb{R}$, $p \in (0,2]$ とし，任意の $x,y \in K$ に対し $|u(x)-u(y)|^p \le \sum_{k=1}^n |u_k(x)-u_k(y)|^p$ と仮定する．このとき $u \in \mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u,u)^{p/2} \le \sum\nolimits_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k,u_k)^{p/2}. \tag{2.54}$$

(2) $u \in \mathcal{F}$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n, u-u_n) = 0$ となるためには，$\limsup_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}(u,u)$ かつ任意の $x,y \in K$ に対し $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y)) = u(x)-u(y)$ となることが必要十分である．

証明. (1) V を K の空でない有限部分集合とし $(L_{xy}^V)_{x,y\in V} := L_{\mathcal{E}|_V}$ とすると，$2/p \in [1,\infty)$ に注意して $u, \{u_k\}_{k=1}^n$ に対する仮定と Minkowski の不等式により

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V)^{p/2} &= \Bigl(\frac{1}{2}\sum\nolimits_{x,y\in V, x\ne y} L_{xy}^V\bigl(|u(x)-u(y)|^p\bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2}\\
&\le \Bigl(\frac{1}{2}\sum\nolimits_{x,y\in V, x\ne y} L_{xy}^V\Bigl(\sum\nolimits_{k=1}^n |u_k(x)-u_k(y)|^p\Bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2}\\
&\le \sum\nolimits_{k=1}^n\Bigl(\frac{1}{2}\sum\nolimits_{x,y\in V, x\ne y} L_{xy}^V\bigl(|u_k(x)-u_k(y)|^p\bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2}\\
&= \sum\nolimits_{k=1}^n \mathcal{E}|_V(u_k|_V,u_k|_V)^{p/2} \le \sum\nolimits_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k,u_k)^{p/2} < \infty.
\end{aligned}$$

そこで V について上限を取り系 2.37 を用いれば $u \in \mathcal{F}$ と (2.54) が得られる．
(2) 必要性は (2.8) と (2.41) から明らかであるので，十分性を示せばよい．まず $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)=\mathcal{E}(u,u)$ を示す．$\varepsilon\in(0,\infty)$ とする．$\limsup_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)\leq\mathcal{E}(u,u)$ より $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geq N_1$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u_n,u_n)\leq\mathcal{E}(u,u)+\varepsilon$. また系 2.37 より K の空でない有限部分集合 V を $\mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V)>\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon$ となるように取れるが，$\mathcal{E}|_V=\mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}}$ に対する (2.10) と $x,y\in V$ に対し $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y))=u(x)-u(y)$ であることから $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}|_V(u_n|_V,u_n|_V)=\mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V)>\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon$. そこで (2.53) に注意すれば，$N_2\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geq N_2$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon<\mathcal{E}|_V(u_n|_V,u_n|_V)\leq\mathcal{E}(u_n,u_n)$ となり，従って $n\geq N_1\vee N_2$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon\leq\mathcal{E}(u_n,u_n)\leq\mathcal{E}(u,u)+\varepsilon$. 以上で $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)=\mathcal{E}(u,u)$ が示せた．

さて，(2.8) により $\{\frac{u+u_n}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ も $u\in\mathcal{F}$ に対して $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と同じ仮定を満たすので前段落の結果から $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}\bigl(\frac{u+u_n}{2},\frac{u+u_n}{2}\bigr)=\mathcal{E}(u,u)$ であり，よって $\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=2\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u_n,u_n)-\mathcal{E}(u+u_n,u+u_n)$ は $n\to\infty$ のとき $2\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u,u)-4\mathcal{E}(u,u)=0$ に収束する．これで十分性が示せた． □

系 2.39. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) $u\in\mathcal{F}$ に対し $|u|,u^+,u^-\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(|u|,|u|)\vee\mathcal{E}(u^+,u^+)\vee\mathcal{E}(u^-,u^-)\leq\mathcal{E}(u,u)$.
(2) $u,v\in\mathcal{F}$ に対し $u\vee v,u\wedge v\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u\vee v,u\vee v)+\mathcal{E}(u\wedge v,u\wedge v)\leq\mathcal{E}(u,u)+\mathcal{E}(v,v)$.
(3) $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}:=\{u\in\mathcal{F}\mid\|u\|_\infty<\infty\}$ とおくとき，$u,v\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ に対し $uv\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ かつ $\mathcal{E}(uv,uv)^{1/2}\leq\|v\|_\infty\mathcal{E}(u,u)^{1/2}+\|u\|_\infty\mathcal{E}(v,v)^{1/2}$.
(4) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\varphi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は任意の $s,t\in\mathbb{R}$ に対し $|\varphi_n(s)-\varphi_n(t)|\leq|s-t|$ を満たすとし，さらに任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=t$ と仮定する．このとき $u\in\mathcal{F}$ に対し $\{\varphi_n\circ u\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-\varphi_n\circ u,u-\varphi_n\circ u)=0$.
(5) $u\in\mathcal{F}$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ は $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)=0$ を満たすとし，さらに $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u(x)$ となる $x\in K$ が存在すると仮定する．このとき $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が任意の $s,t\in\mathbb{R}$ に対し $|\varphi(s)-\varphi(t)|\leq|s-t|$ を満たし，かつ $\varphi\circ u=u$ ならば，$\{\varphi\circ u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-\varphi\circ u_n,u-\varphi\circ u_n)=0$.

証明. (1) $v\in\{|u|,u^+,u^-\}$ とすると明らかに任意の $x,y\in K$ に対し $|v(x)-v(y)|\leq|u(x)-u(y)|$ であるので，定理 2.38-(1) から $v\in\mathcal{F}$, $\mathcal{E}(v,v)\leq\mathcal{E}(u,u)$.
(2) $u\vee v=\frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$, $u\wedge v=\frac{1}{2}(u+v-|u-v|)$ であるので，(1) より $|u-v|,u\vee v,u\wedge v\in\mathcal{F}$, $\mathcal{E}(|u-v|,|u-v|)\leq\mathcal{E}(u-v,u-v)$ であり，従って

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u\vee v,u\vee v)+\mathcal{E}(u\wedge v,u\wedge v)&=\tfrac{1}{2}(\mathcal{E}(u+v,u+v)+\mathcal{E}(|u-v|,|u-v|))\\&\leq\tfrac{1}{2}(\mathcal{E}(u+v,u+v)+\mathcal{E}(u-v,u-v))=\mathcal{E}(u,u)+\mathcal{E}(v,v).\end{aligned}$$

(3) $u_1:=\|v\|_\infty u$, $u_2:=\|u\|_\infty v$ とおくと $u_1,u_2\in\mathcal{F}$ であり，$x,y\in K$ に対し

$$\begin{aligned}|(uv)(x)-(uv)(y)|&\leq|v(x)||u(x)-u(y)|+|u(y)||v(x)-v(y)|\\&\leq\|v\|_\infty|u(x)-u(y)|+\|u\|_\infty|v(x)-v(y)|=\textstyle\sum_{k=1}^2|u_k(x)-u_k(y)|\end{aligned}$$

なので，定理 2.38-(1) を用いれば $\|uv\|_\infty\leq\|u\|_\infty\|v\|_\infty<\infty$ と合わせ主張を得る．
(4) 定理 2.38-(1) より各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\varphi_n\circ u\in\mathcal{F}$, $\mathcal{E}(\varphi_n\circ u,\varphi_n\circ u)\leq\mathcal{E}(u,u)$ であり，そこで定理 2.38-(2) を用いれば $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-\varphi_n\circ u,u-\varphi_n\circ u)=0$ が従う．
(5) 任意の $y\in K$ に対し，$u,\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対する仮定と (2.41) から

$$|u(y)-u_n(y)|\leq R_{\mathcal{E}}(x,y)^{1/2}\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n)^{1/2}+|u(x)-u_n(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

従って $\lim_{n\to\infty} u_n(y) = u(y)$, よってさらに $\lim_{n\to\infty} \varphi\circ u_n(y) = \varphi\circ u(y) = u(y)$ であり，また定理 2.38-(1) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi\circ u_n \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(\varphi\circ u_n, \varphi\circ u_n) \le \mathcal{E}(u,u)$. ゆえに定理 2.38-(2) により $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - \varphi\circ u_n, u - \varphi\circ u_n) = 0$. □

注意 2.40. 系 2.39-(4) は，$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\varphi_n(t) = (-n) \vee (t \wedge n)$ で与えられる場合及び $\varphi_n(t) = t - (-n^{-1}) \vee (t \wedge n^{-1})$ で与えられる場合によく用いられる．また系 2.39-(5) は $u \ge 0$ で $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\varphi(t) = t^+$ で与えられる場合によく用いられる．

次に「有限集合上の Laplacian の適合列の極限は可算集合で定義されているに過ぎない」という前節の最後に触れた問題の解決策として，抵抗形式は有効抵抗距離に関する完備化を取る操作で不変であることを示そう．

定理 2.41. (K, R) を距離空間とし，$K_0 \subset K$ は $\overline{K_0}^K = K$ と $R|_{K_0\times K_0} \in \mathcal{RM}(K_0)$ を満たすとする．$R_{\mathcal{E}_0} = R|_{K_0\times K_0}$ なる（唯 1 つの）$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathcal{RF}(K_0)$ を取り，

$$\mathcal{F} := \{u \in \mathcal{C}(K) \mid u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0\}, \qquad \mathcal{E}(u,v) := \mathcal{E}_0(u|_{K_0}, v|_{K_0}), \quad u, v \in \mathcal{F} \tag{2.55}$$

により $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^K$ と $\mathcal{E} : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を定める．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}} = R$ であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ は線型同型である．

証明. 明らかに $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間であり，$\mathcal{E} : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は非負定値対称双線型である．$u \in \mathcal{F}_0$ とすると (2.41) より $u : K_0 \to \mathbb{R}$ は（R 及び $\mathbb{R}$ 上の通常の距離に関して）一様連続であるから，演習 2.4-(1) より $v \in \mathcal{C}(K)$ が唯 1 つ存在して $v|_{K_0} = u$ となり，このとき $v \in \mathcal{F}$ である．従って $\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ は全単射，よって線型同型である．そこで $\mathbf{1}_K|_{K_0} = \mathbf{1}_{K_0}$ に注意すると，$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ に対する (RF1), (RF4) から $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する (RF1), (RF4) が直ちに従う．また $u \in \mathcal{F}$ とすると，$K\times K$ 上の連続関数 $K\times K \ni (x,y) \mapsto |u(x)-u(y)|^2 - R(x,y)\mathcal{E}(u,u) \in \mathbb{R}$ は $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ と $u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ に対する (2.41) により $K_0\times K_0$ 上 $(-\infty, 0]$ 値であるので，連続性から $\overline{K_0\times K_0}^{K\times K} = K\times K$ 上でも $(-\infty, 0]$ 値である．すなわち任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x, y \in K$ に対し $|u(x)-u(y)|^2 \le R(x,y)\mathcal{E}(u,u)$.

後は $x, y \in K, x \ne y$ とし，$u \in \mathcal{F}$ で $u(x) = 1, u(y) = 0, \mathcal{E}(u,u) = R(x,y)^{-1}$ を満たすものが存在することを示せば，(RF2) が得られ，さらに前段落の結果と合わせると (2.40) の上限は最大値であって $\mathcal{E}(u,u)^{-1} = R(x,y)$ に等しいことが分かるので，(RF3) と $R_{\mathcal{E}} = R$ も従い証明が完了する．そこで以下そのような $u \in \mathcal{F}$ の存在を示す．$\overline{K_0}^K = K$, $R(x,y) > 0$ より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n, y_n \in K_0$ を $R(x,x_n) \vee R(y,y_n) < n^{-1} \wedge \frac{R(x,y)}{2}$ となるように取れて，このとき $R(x_n,y_n) > 0$, 従って $x_n \ne y_n$ なのでさらに $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathcal{RF}(K_0)$ に対する定理 2.29 により，$u_n \in \mathcal{F}$ で $u_n(x_n) = 1, u_n(y_n) = 0, \mathcal{E}(u_n,u_n) = R(x_n,y_n)^{-1}$ を満たすものが唯 1 つ存在し $u_n|_{K_0} = h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_n,y_n\}}(\mathbf{1}^{\{x_n,y_n\}}_{x_n})$ である．(2.42), (2.43) より任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_k,u_l) &= \mathcal{E}_0(u_k|_{K_0}, u_l|_{K_0}) = \mathcal{E}_0\big(h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k,y_k\}}(\mathbf{1}^{\{x_k,y_k\}}_{x_k}), u_l|_{K_0}\big) \\ &= \mathcal{E}_0\big(h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k,y_k\}}(\mathbf{1}^{\{x_k,y_k\}}_{x_k}), h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k,y_k\}}(u_l|_{\{x_k,y_k\}})\big) \\ &= \mathcal{E}_0|_{\{x_k,y_k\}}\big(\mathbf{1}^{\{x_k,y_k\}}_{x_k}, u_l|_{\{x_k,y_k\}}\big) = R(x_k,y_k)^{-1}(u_l(x_k) - u_l(y_k)).\end{aligned} \tag{2.56}$$

さらに $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ に対する (2.41) から，任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}|u_l(x_k) - 1|^2 = |u_l(x_k) - u_l(x_l)|^2 \le R(x_k,x_l)\mathcal{E}(u_l,u_l) = R(x_k,x_l)R(x_l,y_l)^{-1}, \\ |u_l(y_k)|^2 = |u_l(y_k) - u_l(y_l)|^2 \le R(y_k,y_l)\mathcal{E}(u_l,u_l) = R(y_k,y_l)R(x_l,y_l)^{-1}\end{aligned}$$

であるが，$\lim_{n\to\infty} R(x_n,x)\vee R(y_n,y)=0$ より $\lim_{n\to\infty} R(x_n,y_n)=R(x,y)>0$, $\lim_{k\wedge l\to\infty} R(x_k,x_l)\vee R(y_k,y_l)=0$ なので，$\lim_{k\wedge l\to\infty}(u_l(x_k)-u_l(y_k))=1$ となる．これと (2.56) 及び $\lim_{n\to\infty} R(x_n,y_n)=R(x,y)>0$ から

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u_k-u_l,u_k-u_l)\\&=R(x_k,y_k)^{-1}+R(x_l,y_l)^{-1}-2R(x_k,y_k)^{-1}(u_l(x_k)-u_l(y_k))\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0\end{aligned}$$

となるので，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K,\mathcal{E})$ の完備性により $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(v-u_n,v-u_n)=0$ となる $v\in\mathcal{F}$ が存在し，(2.8) より $\mathcal{E}(v,v)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n)=\lim_{n\to\infty}R(x_n,y_n)^{-1}=R(x,y)^{-1}$. また v は K 上連続なので $v(x)-v(y)=\lim_{n\to\infty}(v(x_n)-v(y_n))$ であり，$(\mathcal{E}_0,\mathcal{F}_0)$ に対する (2.41) から $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}|v(x_n)-v(y_n)-1|^2&=|(v-u_n)(x_n)-(v-u_n)(y_n)|^2\\&\le R(x_n,y_n)\mathcal{E}(v-u_n,v-u_n)\xrightarrow{n\to\infty}0\end{aligned}$$

であるので，$v(x)-v(y)=1$ である．そこで $u:=v-v(y)$ とすれば $u\in\mathcal{F}$, $u(x)=1, u(y)=0, \mathcal{E}(u,u)=\mathcal{E}(v,v)=R(x,y)^{-1}$. 以上で証明が完了した． □

(K,R) が $(K_0,R_{\mathcal{E}_0})$ の完備化として与えられている場合に定理 2.41 を適用することで，有効抵抗距離に関する完備化についての次の系を得る．

系 2.42. K_0 を空でない集合，$(\mathcal{E}_0,\mathcal{F}_0)\in\mathcal{RF}(K_0)$ とし，(K,R) を $(K_0,R_{\mathcal{E}_0})$ の完備化，すなわち（等長同型を除いて一意的に存在する）$K_0\subset K$, $R|_{K_0\times K_0}=R_{\mathcal{E}_0}$, $\overline{K_0}^K=K$ を満たす完備距離空間とする．このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を (2.55) により定めると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}}=R$ であり，$\mathcal{F}\ni u\mapsto u|_{K_0}\in\mathcal{F}_0$ は線型同型である．

抵抗形式を新たに構成するという立場からは初めに有限集合上の Laplacian の適合列を与えるのが自然であり，その場合には系 2.42 は次のように述べられる．

系 2.43. $\mathcal{S}=\{(V_m,L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列，(K,R) を $(V_*(\mathcal{S}),R_{\mathcal{S}})$ の完備化とし，$\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^K,\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&:=\{u\in C(K)\mid u|_{V_*(\mathcal{S})}\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}=\left\{u\in C(K)\;\middle|\;\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},u|_{V_m})<\infty\right\},\\\mathcal{E}(u,v)&:=\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u|_{V_*(\mathcal{S})},v|_{V_*(\mathcal{S})})=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},v|_{V_m}),\quad u,v\in\mathcal{F}\end{aligned}\tag{2.57}$$

により定める．このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}}=R$ であり，$\mathcal{F}\ni u\mapsto u|_{V_*(\mathcal{S})}\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型同型である．

証明. 定義 2.28 の直前の段落で注意したように $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathcal{F}_{\mathcal{S}})\in\mathcal{RF}(V_*(\mathcal{S}))$, $R_{\mathcal{S}}=R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}$ であるので，$K_0:=V_*(\mathcal{S}),(\mathcal{E}_0,\mathcal{F}_0):=(\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ として系 2.42 を適用することにより主張を得る． □

注意 2.44. 系 2.42, 系 2.43 において (K,R) は $(K_0,R_{\mathcal{E}_0})$ あるいは $(V_*(\mathcal{S}),R_{\mathcal{S}})$ の抽象的な完備化として与えられているに過ぎず，(K,R) **が具体的にどのような距離空間になっているかは個別の解析を経なければ分からない**ことに注意されたい．

実際，第 3 章の主題である Sierpiński gasket 上の Laplacian の構成は，$V_*(\mathcal{S})$ が Sierpiński gasket K' の部分集合である場合に系 2.43 を適用することによりなされるが，その際に $(V_*(\mathcal{S}),R_{\mathcal{S}})$ の完備化 (K,R) を位相空間として元の Sierpiński gasket K'（を Euclid 距離の制限により位相空間と見なしたもの）と同一視できることは自明でなく証明を要する．この詳細は第 3 章を，さらにより詳しくは [28, Section 3.3] を参照のこと．

定理 2.41 において元の K 上の距離関数 R 自身が既に $R \in \mathcal{RM}(K)$ を満たしており，さらに K_0 が可算集合である場合を考えれば次の系が得られる．

系 2.45. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，K を距離関数 $R_{\mathcal{E}}$ により位相空間と見なす．K は可分と仮定し，K の空でない有限部分集合の非減少列 $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ で $V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ が $\overline{V_*}^K = K$ を満たすものを取る．このとき $\mathcal{S} := \{(V_m, L_{\mathcal{E}|_{V_m}})\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の適合列，

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{C}(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\} = \Bigl\{u \in \mathcal{C}(K) \Bigm| \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}|_{V_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty \Bigr\},$$
$$\mathcal{E}(u, v) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u|_{V_*}, v|_{V_*}) = \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}|_{V_m}(u|_{V_m}, v|_{V_m}), \quad u, v \in \mathcal{F} \tag{2.58}$$

であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型同型である．

証明. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $L_m := L_{\mathcal{E}|_{V_m}}$ とおく．$m \leq n$ なる $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し命題 2.33 と定理 2.8 より $\mathcal{E}_{L_m} = \mathcal{E}|_{V_m} = \mathcal{E}|_{V_n}|_{V_m} = \mathcal{E}_{L_n}|_{V_m} = \mathcal{E}_{[L_n]_{V_m}}$ であるので $L_m = [L_n]_{V_m}$, すなわち $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の適合列であり，さらに $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し系 2.34 と (2.33) より $R_{\mathcal{E}}|_{V_m \times V_m} = R_{L_m} = R_{\mathcal{S}}|_{V_m \times V_m} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}|_{V_m \times V_m}$, よって $R_{\mathcal{E}}|_{V_* \times V_*} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}$. そこで $R := R_{\mathcal{E}}$, $K_0 := V_*$, $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) := (\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ として定理 2.41 を用いれば，(2.58) の両式の右辺が $R_{\mathcal{E}}$ を有効抵抗距離に持つ K 上の抵抗形式を定め，かつ $\{u \in \mathcal{C}(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が線型同型であることが分かる．ところが定理 2.36-(2) によりこの抵抗形式は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に等しいので (2.58) が得られ，主張が従う． □

本節の最後に，補題 2.20 の一般化として抵抗形式に対しては空でない閉集合を境界とする Green 関数が自然に定まることを示す．次の定義と 2 つの命題はそのための準備である．

定義 2.46. 空でない集合 K と $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間 $\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathcal{F}(U) := \{u \in \mathcal{F} \mid u|_{K \setminus U} = 0\}, \quad U \subset K, \tag{2.59}$$
$$B^{\mathcal{F}} := \bigcap\nolimits_{u \in \mathcal{F}(K \setminus B)} u^{-1}(0), \quad B \subset K \tag{2.60}$$

と定める．各 $B \subset K$ に対し，容易に分かるように $B \subset B^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}(K \setminus B^{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(K \setminus B)$, 従って $(B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}} = B^{\mathcal{F}}$ であり，また $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ ならば (2.41) より各 $u \in \mathcal{F}$ は $(K, R_{\mathcal{E}})$ 上の連続関数なので $B^{\mathcal{F}}$ は $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合であることを注意しておく．

命題 2.47. K を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間で $\{u^+ \wedge 1 \mid u \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$, 及び任意の $x \in K$ に対し $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq 0$, を満たすとする．このとき $\emptyset^{\mathcal{F}} = \emptyset$, かつ各 $A, B \subset K$ に対し $(A \cup B)^{\mathcal{F}} = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ であり，特に K には $B \mapsto B^{\mathcal{F}}$ を閉包作用子とする位相が入る．また，任意の $x \in K$ に対し $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$ となるためには $\mathcal{F}$ が定義 2.26 の (RF2) を満たすことが必要十分である．

証明. 仮定より各 $x \in K$ に対し $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq 0$ すなわち $x \notin u^{-1}(0)$ であるので，$\emptyset^{\mathcal{F}} = \bigcap_{u \in \mathcal{F}} u^{-1}(0) = \emptyset$. 次に $A, B \subset K$ とする．$\mathcal{F}(K \setminus (A \cup B)) = \mathcal{F}(K \setminus A) \cap \mathcal{F}(K \setminus B)$ なので $A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}} \subset (A \cup B)^{\mathcal{F}}$ である．逆に $x \in K \setminus (A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}})$ とすると，$u \in \mathcal{F}(K \setminus A), v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ が存在して $u(x) = v(x) = 1$ となり，そこで $g := u^+ \wedge 1, h := v^+ \wedge 1, f := g + h - (g+h)^+ \wedge 1$ とおけば，$g, h, f \in \mathcal{F}, f(x) = 1$ であり，また各 $y \in A \cup B$ に対し $u(y) = 0$ または $v(y) = 0$ より $(g+h)(y) \in [0, 1]$, 従って $f(y) = 0$ なので $f \in \mathcal{F}(K \setminus (A \cup B))$, よって $x \in K \setminus (A \cup B)^{\mathcal{F}}$ である．ゆえに $(A \cup B)^{\mathcal{F}} \subset A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ となり，$(A \cup B)^{\mathcal{F}} = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ が示せた．定義 2.46

で注意したように各 $B \subset K$ に対し $B \subset B^{\mathcal{F}} = (B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}}$ でもあるので，$B \mapsto B^{\mathcal{F}}$ は閉包作用子の公理を満たし，よってこれを閉包作用子とする位相が K に入る．

$\mathcal{F}$ が定義 2.26 の (RF2) を満たすとすると，$x \neq y$ なる任意の $x, y \in K$ に対し，補題 2.27 より $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) = 0 \neq u(y)$ となり，従って $u \in \mathcal{F}(K \setminus \{x\})$, $y \notin u^{-1}(0)$ であるので $y \notin \{x\}^{\mathcal{F}}$, ゆえに $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$. 逆に任意の $x \in K$ に対し $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$ であるとすると，$x \neq y$ なる任意の $x, y \in K$ に対し $y \notin \{x\} = \{x\}^{\mathcal{F}}$ より $u \in \mathcal{F}(K \setminus \{x\})$, すなわち $u(x) = 0$ なる $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(y) \neq 0$ となるので，$\mathcal{F}$ は定義 2.26 の (RF2) を満たす． □

命題 2.48. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．このとき任意の $x \in K$ に対し，

$$
\begin{aligned}
R_{\mathcal{E}}(x, B) &:= R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(x, B) := \bigl(\min\{\mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}(K \setminus B), u(x) = 1\}\bigr)^{-1} \\
&= \max_{u \in \mathcal{F}(K \setminus B) \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|^2}{\mathcal{E}(u, u)} \begin{cases} \in (0, \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)], & x \in K \setminus B, \\ = 0, & x \in B \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

（ただし $\min \emptyset := \infty, \infty^{-1} := 0, \max \emptyset := 0$）．

証明. $x \in B$ ならば $\{u \in \mathcal{F}(K \setminus B) \mid u(x) \neq 0\} = \emptyset$ より (2.61) の各辺は共に 0 に等しいので，以下 $x \in K \setminus B$ とする．$x \notin B = B^{\mathcal{F}}$ より $\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}} \in \mathcal{F}|_{B \cup \{x\}}$ なので，定理 2.29 より最小値 $\min\{\mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}(K \setminus B), u(x) = 1\} = \min_{u \in \mathcal{F}, u|_{B \cup \{x\}} = \mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}}} \mathcal{E}(u, u)$ は存在して $v := h^{\mathcal{E}}_{B \cup \{x\}}(\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}})$ により達成され正であり，また $R_{\mathcal{E}}(x, B) = \mathcal{E}(v, v)^{-1} > 0$ が $\bigl\{|u(x)|^2 / \mathcal{E}(u, u) \bigm| u \in \mathcal{F}(K \setminus B) \setminus \{0\}\bigr\}$ の最大値を与えることが (2.22) と全く同様にして示される．さらに任意の $y \in B$ に対し (2.41) より $R_{\mathcal{E}}(x, B) = \mathcal{E}(v, v)^{-1} |v(x) - v(y)|^2 \leq R_{\mathcal{E}}(x, y)$ であるので，$y \in B$ に対する下限を取ることで $R_{\mathcal{E}}(x, B) \leq \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)$ を得る． □

定理 2.49. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．このとき各 $x \in K$ に対し，$g_B^x \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ で任意の $u \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ について $\mathcal{E}(u, g_B^x) = u(x)$ を満たすものが唯 1 つ存在する．さらに $g_B = g_B^{\mathcal{E}} = g_B^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} : K \times K \to \mathbb{R}$ を $g_B(x, y) := g_B^x(y)$ で定めると，

$$
0 \leq g_B(x, y) = g_B(y, x) \leq g_B(x, x) = R_{\mathcal{E}}(x, B), \quad x, y \in K, \tag{2.62}
$$

$$
|g_B(x, y) - g_B(x, z)|^2 \leq R_{\mathcal{E}}(y, z) g_B(x, x), \quad x, y, z \in K. \tag{2.63}
$$

証明. $x \in K$ とする．主張の g_B^x と同じ性質を $v_1, v_2 \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ が持つとすると，$u := v_1 - v_2$ として $\mathcal{E}(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = \mathcal{E}(u, v_1) - \mathcal{E}(u, v_2) = 0$ なので (RF1) より $v_1 - v_2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ となり，これと $B \neq \emptyset, (v_1 - v_2)|_B = 0$ から $v_1 - v_2 = 0$ すなわち $v_1 = v_2$ が従う．さらに $x \in B$ とするとき，$g_B^x := 0 \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ とおくとこれは任意の $u \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ に対し $\mathcal{E}(u, g_B^x) = 0 = u(x)$ を満たし，また命題 2.48 より任意の $y \in K$ に対し $0 \leq g_B^x(y) = 0 \leq g_B^x(x) = 0 = R_{\mathcal{E}}(x, B)$.

そこで $x \in K \setminus B$ とし，$x \notin B = B^{\mathcal{F}}$ より $\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}} \in \mathcal{F}|_{B \cup \{x\}}$ であることに注意して $v_x, g_B^x \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ を $v_x := h^{\mathcal{E}}_{B \cup \{x\}}(\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}}), g_B^x := R_{\mathcal{E}}(x, B) v_x$ で定める．すると定理 2.29（または命題 2.48 の証明）より $\mathcal{E}(v_x, v_x) = R_{\mathcal{E}}(x, B)^{-1}$ であり，そこで任意の $u \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ に対し $(u - u(x) v_x)|_{B \cup \{x\}} = 0$ に注意して (2.42) より

$$
\mathcal{E}(u, g_B^x) = \mathcal{E}(u - u(x) v_x, g_B^x) + \mathcal{E}(u(x) v_x, g_B^x) = u(x) R_{\mathcal{E}}(x, B) \mathcal{E}(v_x, v_x) = u(x).
$$

ゆえに g_B^x は主張の性質を満たす．さらに任意の $y \in K$ に対し，命題 2.32 より $0 \leq v_x(y) \leq 1$ なので $0 \leq g_B^x(y) = R_{\mathcal{E}}(x, B) v_x(y) \leq R_{\mathcal{E}}(x, B) = g_B^x(x)$ となる．

最後に任意の $x, y \in K$ に対し，主張の g_B^x, g_B^y の性質と $\mathcal{E}$ の対称性より

$$g_B(x,y) = g_B^x(y) = \mathcal{E}(g_B^x, g_B^y) = \mathcal{E}(g_B^y, g_B^x) = g_B^y(x) = g_B(y,x)$$

であり，また (2.63) は $u = g_B^x$ に対する (2.41) と $\mathcal{E}(g_B^x, g_B^x) = g_B^x(x)$ から従う． □

定義 2.50. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．このとき定理 2.49 の $g_B = g_B^{\mathcal{E}} = g_B^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} : K \times K \to \mathbb{R}$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関する B を境界とする **Green 関数**といい，どの $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関してかが文脈から明らかである場合には単に B を境界とする Green 関数という．

実は有限集合上の抵抗形式に対する補題 2.20 と同様に，定義 2.50 の Green 関数は有効抵抗距離を用いて具体的に表示することができる．これを以下に定理 2.52 として述べるが，その主張と証明のために次の命題が必要である．

命題 2.51. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．$K_B := (K \setminus B) \cup \{B\}$ とおき，$\pi_B : K \to K_B$ を $x \in K \setminus B$ に対し $\pi_B(x) := x$, また $x \in B$ に対し $\pi_B(x) := B$ で定める．このとき

$$\mathcal{F}^B := \{u \in \mathbb{R}^{K_B} \mid u \circ \pi_B \in \mathcal{F}\}, \tag{2.64}$$

$$\mathcal{E}^B(u,v) := \mathcal{E}(u \circ \pi_B, v \circ \pi_B), \quad u, v \in \mathcal{F}^B \tag{2.65}$$

と定めると $(\mathcal{E}^B, \mathcal{F}^B) \in \mathcal{RF}(K_B)$ であり，さらに

$$R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y)) \leq R_{\mathcal{E}}(x,y), \quad x, y \in K, \tag{2.66}$$

$$R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), B) = R_{\mathcal{E}}(x, B), \quad x \in K. \tag{2.67}$$

証明. 明らかに $\mathcal{F}^B$ は $\mathbb{R}^{K_B}$ の線型部分空間，$\mathcal{E}^B$ は $\mathcal{F}^B$ 上の非負定値対称双線型形式であり，$\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ から $\{u \in \mathcal{F}^B \mid \mathcal{E}^B(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ が分かる．$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^B$ が $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}^B(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとすると，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性から $v \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v - u_n \circ \pi_B, v - u_n \circ \pi_B) = 0$ となるが，このとき $x, y \in B$ とすると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $u_n \circ \pi_B(x) = u_n(B) = u_n \circ \pi_B(y)$ なので (2.41) より $v(x) - v(y) = \lim_{n\to\infty}(u_n \circ \pi_B(x) - u_n \circ \pi_B(y)) = 0$. よって $v|_B \in \mathbb{R}\mathbf{1}_B$ なので，$z \in B$ を任意に取り $u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K\setminus B} := v|_{K\setminus B}$, $u(B) := v(z)$ で定めると $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$, 従って $u \in \mathcal{F}^B$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}^B(u - u_n, u - u_n) = 0$ となる．以上で $(\mathcal{F}^B/\mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}, \mathcal{E}^B)$ の完備性が得られ，(RF1) が示せた．

(RF2) を示すために $x, y \in K_B, x \neq y$ とする．一般性を失うことなく $y \in K \setminus B$ と仮定してよい．$B_x \subset K$ を $x \in K \setminus B$ のとき $B_x := B \cup \{x\}$, $x = B$ のとき $B_x := B$ で定める．このとき $B^{\mathcal{F}} = B$ と命題 2.47 より $y \notin B_x = (B_x)^{\mathcal{F}}$ なので $v \in \mathcal{F}(K \setminus B_x)$ が存在して $v(y) \neq 0$ となり，そこで $u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K\setminus B} := v|_{K\setminus B}$, $u(B) := 0$ で定めると，$v|_{B_x} = 0$ より $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$ なので $u \in \mathcal{F}^B$ であり，また $u(y) = v(y) \neq 0 = u(x)$. ゆえに (RF2) が成り立つ．

$x, y \in K$ とすると，各 $u \in \mathcal{F}^B \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ に対し $u \circ \pi_B \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ なので

$$\frac{|u(\pi_B(x)) - u(\pi_B(y))|^2}{\mathcal{E}^B(u,u)} = \frac{|u \circ \pi_B(x) - u \circ \pi_B(y)|^2}{\mathcal{E}(u \circ \pi_B, u \circ \pi_B)} \leq R_{\mathcal{E}}(x,y) < \infty$$

であり，$u \in \mathcal{F}^B \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ について上限を取ることで (RF3) と $R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y)) \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)$ を得る．また，$u \in \mathcal{F}^B$ とすると $(u^+ \wedge 1) \circ \pi_B = (u \circ \pi_B)^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$ なので $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}^B$ であり，さらに $\mathcal{E}^B(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) = \mathcal{E}((u \circ \pi_B)^+ \wedge 1, (u \circ \pi_B)^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u \circ \pi_B, u \circ \pi_B) = \mathcal{E}^B(u,u)$ となるので (RF4) が成り立つ．

最後に (2.67) を示そう．$x \in B$ に対しては $R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), B) = 0 = R_{\mathcal{E}}(x, B)$ となり (2.67) は成り立つので，以下 $x \in K \setminus B$ とする．このとき $u \in \mathcal{F}^B$ で $u(x) = 1, u(B) = 0$ を満たすものを任意に取り $v := u \circ \pi_B$ とおくと，明らかに $v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ かつ $v(x) = 1$. 逆に $v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ で $v(x) = 1$ を満たすものを任意に取るとき，$u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K\setminus B} := v|_{K\setminus B}, u(B) := 0$ で定めると，$v|_B = 0$ より $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$ となるので特に $u \in \mathcal{F}^B$ であり，また $u(x) = v(x) = 1, u(B) = 0$. これらの事実と (2.65) より

$$\{\mathcal{E}^B(u, u) \mid u \in \mathcal{F}^B, u(x) = 1, u(B) = 0\} = \{\mathcal{E}(v, v) \mid v \in \mathcal{F}(K \setminus B), v(x) = 1\}$$

が分かり，これと (2.46) 及び (2.61) より $R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), B) = R_{\mathcal{E}}(x, B)$ を得る． □

定理 2.52. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．このとき

$$g_B(x, y) = \frac{R_{\mathcal{E}}(x, B) + R_{\mathcal{E}}(y, B) - R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y))}{2}, \quad x, y \in K, \tag{2.68}$$

$$|g_B(x, y) - g_B(x, z)| \le R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(y), \pi_B(z)) \le R_{\mathcal{E}}(y, z), \quad x, y, z \in K. \tag{2.69}$$

証明. $x \in K$ とし，各 $y \in K$ に対し (2.68) の右辺を $v_x(y)$ とおくことで $v_x \in \mathbb{R}^K$ を定める．$g_B(x, \cdot) = v_x$ を示そう．$x \in B$ に対しては，(2.62) より $g_B(x, \cdot) = 0$, また (2.67) より $v_x = 0$ であるので，$g_B(x, \cdot) = v_x$. そこで以下 $x \in K \setminus B$ とする．このとき $y \in B$ に対しては再び (2.67) より $g_B(x, y) = 0 = v_x(y)$ であり，また (2.62) より $g_B(x, x) = R_{\mathcal{E}}(x, B) = v_x(x)$ であるので，$g_B(x, \cdot)|_{K\setminus(B\cup\{x\})} = v_x|_{K\setminus(B\cup\{x\})}$ を示せばよい．

$g_B(x, \cdot)|_B = v_x|_B = 0$ なので，$f_x, u_x \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $f_x|_{K\setminus B} := g_B(x, \cdot)|_{K\setminus B}$, $u_x|_{K\setminus B} := v_x|_{K\setminus B}$, $f_x(B) := 0 =: u_x(B)$ で定めると $f_x \circ \pi_B = g_B(x, \cdot) \in \mathcal{F}$ かつ $u_x \circ \pi_B = v_x$ であり，特に $f_x \in \mathcal{F}^B$. さらに $u|_{\{x,B\}} = 0$ を満たす任意の $u \in \mathcal{F}^B$ に対し $u \circ \pi_B \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ なので $\mathcal{E}^B(u, f_x) = \mathcal{E}(u \circ \pi_B, g_B(x, \cdot)) = u(x) = 0$ となり，ゆえに f_x は $(\mathcal{E}^B, \mathcal{F}^B)$ に関して $\{x, B\}$-調和，すなわち $f_x = h^{\mathcal{E}^B}_{\{x,B\}}(f_x|_{\{x,B\}})$.

さて任意に $y \in K \setminus (B \cup \{x\}) = K_B \setminus \{x, B\}$ を取り $V := \{x, y, B\}, L := L_{\mathcal{E}^B|_V}$ とおく．このとき前段落の結果と命題 2.33 より $f_x|_V = h^{\mathcal{E}^B|_V}_{\{x,B\}}(f_x|_{\{x,B\}})$ であり，一方系 2.34 より $R_{\mathcal{E}^B}|_{V\times V} = R_L$ なので $u_x \circ \pi_B = v_x$ の定義と (2.67) 及び (2.27) から $u_x|_V = g^L_B(x, \cdot)$, 従って補題 2.20 より $u_x|_V$ は $(\mathcal{E}_L, \mathbb{R}^V) = (\mathcal{E}^B|_V, \mathbb{R}^V)$ に関して $\{x, B\}$-調和，すなわち $u_x|_V = h^{\mathcal{E}^B|_V}_{\{x,B\}}(u_x|_{\{x,B\}})$ である．ところが $f_x(x) = g_B(x, x) = v_x(x) = u_x(x)$ かつ $f_x(B) = 0 = u_x(B)$ なので $f_x|_{\{x,B\}} = u_x|_{\{x,B\}}$, 従って $f_x|_V = h^{\mathcal{E}^B}_{\{x,B\}}(f_x|_{\{x,B\}}) = h^{\mathcal{E}^B}_{\{x,B\}}(u_x|_{\{x,B\}}) = u_x|_V$ であり，$y \in V$ なので $g_B(x, y) = f_x(y) = u_x(y) = v_x(y)$ となる．

以上で $g_B(x, \cdot)|_{K\setminus(B\cup\{x\})} = v_x|_{K\setminus(B\cup\{x\})}$ が分かり，(2.68) が示せた．さらに命題 2.51 と系 2.34 より $R_{\mathcal{E}^B} \in \mathcal{RM}(K_B)$, 特に $R_{\mathcal{E}^B}$ は K_B 上の距離関数であるので，(2.69) は (2.68), (2.67) と $R_{\mathcal{E}^B}$ に対する 3 角不等式及び (2.66) から直ちに従う． □

命題 2.48, 定理 2.49, 命題 2.51, 定理 2.52 では条件 $B^{\mathcal{F}} = B$ が「B は K の閉集合である」という仮定に相当している．実際，定義 2.46 で述べた通り $B \subset K$ に対し $B^{\mathcal{F}}$ は $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合，従って $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たす $B \subset K$ も $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合である．しかし B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉部分集合であっても $B^{\mathcal{F}} = B$ は一般には成り立たず，$(K, R_{\mathcal{E}})$ が局所コンパクト可分完備である場合に限っても同様である．次の演習 2.5 はそのような抵抗形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合 B の例を与える．

演習 2.5 ([31, Example 5.5])**.** $m \geq 2$ なる $m \in \mathbb{N}$ に対し $V_m := \{0, 1, \ldots, m\}$ とおき，$L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ を次で定める：

$$(L_m)_{xy} := \begin{cases} 2 & |x-y| = 1 \text{ もしくは } |x-y| = m, \\ 1 & \text{ある } k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{1, m\} \text{ により } \{x, y\} = \{0, k\}, \\ 0 & x, y \in \{1, \ldots, m\}, |x-y| \geq 2. \end{cases} \tag{2.70}$$

(1) $\mathcal{S} := \{(V_m, L_m)\}_{m=2}^{\infty}$ は有限集合上の Laplacian の適合列であることを示せ．
(2) 各 $x, y \in \mathbb{N}$ に対し $R_{\mathcal{S}}(0, x) = \frac{1}{3}$, $R_{\mathcal{S}}(x, y) = \frac{2}{3}(1 - 2^{-|x-y|})$ であることを示せ．(従って $(\mathbb{N} \cup \{0\}, R_{\mathcal{S}})$ は局所コンパクト可分完備距離空間であり，さらにその位相は離散位相，すなわち $\mathbb{N} \cup \{0\}$ の任意の部分集合は開集合かつ閉集合である．)
(3) $\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid u|_{\mathbb{N}} = 0\} = \{0\}$ であることを示せ．(従って $\mathbb{N}^{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である．)

実は次の 2 つの定理に述べる通り，B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ のコンパクト部分集合であれば $B^{\mathcal{F}} = B$ が成り立ち，また $(K, R_{\mathcal{E}})$ がコンパクトであれば $(K, R_{\mathcal{E}})$ の任意の閉部分集合 B に対し $B^{\mathcal{F}} = B$ が成り立つ．

定理 2.53. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) B を K の空でない部分集合とする．$x \in K$ は $\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) > 0$ を満たすとし，V は B の有限部分集合で $B \subset \bigcup_{y \in V} B_{R_{\mathcal{E}}}\bigl(y, \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)\bigr)$ を満たすと仮定する．このとき $x \notin B^{\mathcal{F}}$ であり

$$(4 \cdot \#V)^{-1}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) \leq R_{\mathcal{E}}(x, B^{\mathcal{F}}) \leq \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B^{\mathcal{F}}). \tag{2.71}$$

(2) B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ のコンパクト部分集合ならば $B^{\mathcal{F}} = B$.

証明. (1) $y \in K \setminus \{x\}$ とし，命題 2.47 より $\{y\}^{\mathcal{F}} = \{y\}$ が成り立つことに注意して $u_y := R_{\mathcal{E}}(x, y)^{-1} g_{\{y\}}(x, \cdot)$ とおく．(2.62), (2.61), (2.46) より $g_{\{y\}}(x, x) = R_{\mathcal{E}}(x, \{y\}) = R_{\mathcal{E}}(x, y)$ なので，定理 2.49 及び (2.69) により $u_y \in \mathcal{F}(K \setminus \{y\})$,

$$R_{\mathcal{E}}(x, y)\mathcal{E}(u_y, u_y) = \mathcal{E}(u_y, g_{\{y\}}(x, \cdot)) = u_y(x) = 1, \tag{2.72}$$
$$0 \leq R_{\mathcal{E}}(x, y) u_y(z) = g_{\{y\}}(x, z) - g_{\{y\}}(x, y) \leq R_{\mathcal{E}}(y, z), \quad z \in K. \tag{2.73}$$

そこでさらに $y \in B$, $z \in B_{R_{\mathcal{E}}}\bigl(y, \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)\bigr)$ と仮定すると，$R_{\mathcal{E}}(y, z) < \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) \leq \frac{1}{2} R_{\mathcal{E}}(x, y)$ であるので (2.73) により $u_y(z) \leq \frac{1}{2}$ となる．

さて，$\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) > 0$ より $x \in K \setminus B \subset K \setminus V$ なので各 $y \in V$ に対し前段落の $u_y \in \mathcal{F}$ が定まることに注意して，$v := \min_{y \in V} u_y$ とおく．このとき系 2.39-(2) より $v \in \mathcal{F}$, (2.72) の最後の等号から $v(x) = 1$, (2.73) の最初の不等式より $v \geq 0$ であり，さらに各 $z \in B$ に対し，仮定より $y \in V$ を $z \in B_{R_{\mathcal{E}}}\bigl(y, \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)\bigr)$ となるように選ぶことができるので前段落の最後の議論から $0 \leq v(z) \leq u_y(z) \leq \frac{1}{2}$. そこで $u := 2v - (2v)^{+} \wedge 1$ とおけば，$u \in \mathcal{F}(K \setminus B) = \mathcal{F}(K \setminus B^{\mathcal{F}})$ かつ $u(x) = 1$, 従って $x \notin B^{\mathcal{F}}$ であり，さらに $(B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}} = B^{\mathcal{F}}$ に注意して命題 2.48, 定理 2.38-(1), 系 2.39-(2), (2.72) と $V \subset B$ から

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B^{\mathcal{F}})^{-1} &\leq R_{\mathcal{E}}(x, B^{\mathcal{F}})^{-1} \leq \mathcal{E}(u, u) \leq \mathcal{E}(2v, 2v) = 4\mathcal{E}(v, v) \\ &\leq 4\sum_{y \in V} \mathcal{E}(u_y, u_y) = 4\sum_{y \in V} R_{\mathcal{E}}(x, y)^{-1} \leq (4 \cdot \#V)\,\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)^{-1} \end{aligned}$$

となるので，(2.71) が得られる．
(2) 命題 2.47 より $\emptyset^{\mathcal{F}} = \emptyset$ であるので，$B \neq \emptyset$ と仮定してよい．$x \in K \setminus B$ とする．このとき B のコンパクト性から $\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) = \min_{y \in B} R_{\mathcal{E}}(x, y) > 0$ であり，

すると $B \subset \bigcup_{y \in B} B_{R_\mathcal{E}}\bigl(y, \frac{1}{2}\operatorname{dist}_{R_\mathcal{E}}(x, B)\bigr)$ であるので再び B のコンパクト性から B の有限部分集合 V が存在して $B \subset \bigcup_{y \in V} B_{R_\mathcal{E}}\bigl(y, \frac{1}{2}\operatorname{dist}_{R_\mathcal{E}}(x, B)\bigr)$ となる．よって (1) より $x \notin B^\mathcal{F}$ であるので，$B^\mathcal{F} \subset B$, すなわち $B^\mathcal{F} = B$ が従う． □

定理 2.54. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．K を距離関数 $R_\mathcal{E}$ により位相空間と見なし，K はコンパクトであると仮定する．このとき $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ の稠密な線型部分空間であり，さらに K の任意の閉部分集合 B に対し $B^\mathcal{F} = B$.

定理 2.54 は，位相空間論においてよく知られている次の定理から容易に従う．

定理 2.55 (Stone–Weierstrass の定理)**.** K をコンパクト位相空間，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間とするとき，$\mathcal{F}$ が次の 3 条件を満たすならば $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密である：
(SW1) 任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し $uv \in \mathcal{F}$.
(SW2) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in K$ に対し，$u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq u(y)$.
(SW3) 任意の $x \in K$ に対し $v \in \mathcal{F}$ が存在して $v(x) \neq 0$.

証明. 位相空間論の標準的な教科書（例えば [47, 定理 29.4]）を参照のこと． □

定理 2.55 は有名な定理ではあるが，学部生にとって馴染み深いとは言い難いと思われる．そこで以下ではまず定理 2.54 の定理 2.55 を用いた証明を紹介し，その後で定理 2.55 を用いない定理 2.54 の直接証明を与えることにする．

定理 2.54 の証明. まず (2.41) より $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ なので $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$ 上の線型空間 $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間である．またコンパクト位相空間 K 上の任意の $\mathbb{R}$-値連続関数 $f \in \mathcal{C}(K)$ は最大値と最小値を持ち（例えば [47, 定理 22.3-系] を参照）特に $\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)| < \infty$ を満たすので，系 2.39-(3) により任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し $uv \in \mathcal{F}$ である．さらに $\mathcal{F}$ は定義 2.26 の (RF2) すなわち定理 2.55 の (SW2) を満たし，かつ定義 2.26 の (RF1) より任意の $x \in K$ に対し $v := \mathbf{1}_K \in \mathcal{F}$ と取れば $v(x) = 1 \neq 0$, すなわち $\mathcal{F}$ は定理 2.55 の (SW3) も満たす．よって K と $\mathcal{F}$ は Stone–Weierstrass の定理（定理 2.55）の仮定を全て満たすので，同定理により $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ の稠密な線型部分空間である．

B を K の閉部分集合とする．このとき B はコンパクト位相空間 K の閉部分集合としてコンパクトなので $B^\mathcal{F} = B$ は定理 2.53-(2) から直ちに得られるが，次のように $\mathcal{F}$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密であることを用いて示すこともできる．命題 2.47 より $\emptyset^\mathcal{F} = \emptyset$ であるので，$B \neq \emptyset$ と仮定して $B^\mathcal{F} = B$ を示せばよい．$x \in K \setminus B$ とし，$f \in \mathbb{R}^K$ を $f := \operatorname{dist}_{R_\mathcal{E}}(\cdot, B)$ で定めると，$R_\mathcal{E}$ に対する 3 角不等式から容易に $f \in \mathcal{C}(K)$ が分かり，また明らかに $f|_B = 0$, さらに B が K の閉集合であることと $x \in K \setminus B$ から $f(x) > 0$ となる．次に $g \in \mathcal{C}(K)$ を $g := \frac{3}{f(x)} f - 1$ で定めると，$\mathcal{F}$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密であることから $u \in \mathcal{F}$ が存在して $\|u - g\|_\infty \leq 1$ となり，すると $g(x) = 2$ であることから $u(x) \geq g(x) - \|u - g\|_\infty \geq 1$, また $g|_B = -1$ であることから任意の $y \in B$ に対し $u(y) \leq g(y) + \|u - g\|_\infty \leq 0$. そこで $v := u^+ \wedge 1$ とおけば $v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ かつ $v(x) = 1$, 従って $x \notin B^\mathcal{F}$ となるので，$B^\mathcal{F} \subset B$, すなわち $B^\mathcal{F} = B$. □

定理 2.54 の定理 2.55 を用いない直接証明. [47, 定理 29.4 の証明-(4),(5)] に倣う．(2.41) より $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ なので $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(K)$ の線型部分空間である．$\mathcal{F}$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密であることを示すため，$f \in \mathcal{C}(K)$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ を任意に取る．

まず，$x \in K$ を任意に取るとき，$v \in \mathcal{F}$ が存在して $v(x) = f(x)$ かつ $v > f - \varepsilon$ となることを示そう．$\mathcal{F}_x := \{u \in \mathcal{F} \mid u(x) = f(x)\}$ とおく．任意の $y \in K$ に対し，補題 2.27 より $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) = f(x)$ かつ $u(y) = f(y)$ であり，すると $u \in \mathcal{F}_x$ かつ $y \in (u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ であるが，$y \in K$ は任意なので

$K = \bigcup_{u \in \mathcal{F}_x} (u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ となる．ここで各 $u \in \mathcal{F}_x$ に対し $u - f \in \mathcal{C}(K)$ なので $(u - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ は K の開集合であり，従って K がコンパクトであるとの仮定により $m \in \mathbb{N}$ と $\{u_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{F}_x$ が存在して $K = \bigcup_{j=1}^m (u_j - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$. そこで $v := \max_{j \in \{1,\dots,m\}} u_j$ と定めると，系 2.39-(2) により $v \in \mathcal{F}$, また $\{u_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{F}_x$ より $v(x) = f(x)$ であり，さらに $K = \bigcup_{j=1}^m (u_j - f)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ より $v > f - \varepsilon$.

次に $\mathcal{G} := \{v \in \mathcal{F} \mid v > f - \varepsilon\}$ とおく．このとき任意の $x \in K$ に対し，前段落の結果により $v \in \mathcal{G}$ が存在して $v(x) = f(x)$, 従って $x \in (v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ であるが，$x \in K$ は任意なので $K = \bigcup_{v \in \mathcal{G}} (v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ となる．ここで各 $v \in \mathcal{G}$ に対し $v - f \in \mathcal{C}(K)$ なので $(v - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ は K の開集合であり，従って K がコンパクトであるとの仮定により $n \in \mathbb{N}$ と $\{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}$ が存在して $K = \bigcup_{k=1}^n (v_k - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. そこで $w := \min_{k \in \{1,\dots,n\}} v_k$ と定めると，系 2.39-(2) により $w \in \mathcal{F}$, また $\{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}$ より $w > f - \varepsilon$ であり，さらに $K = \bigcup_{k=1}^n (v_k - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ より $w < f + \varepsilon$, 従って $\|w - f\|_\infty \le \varepsilon$. すなわち「$w \in \mathcal{F}$ が存在して $\|w - f\|_\infty \le \varepsilon$」が得られたが，ここで $f \in \mathcal{C}(K)$ と $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意だったのでこれは任意の $f \in \mathcal{C}(K)$ が $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ における $\mathcal{F}$ の閉包に属することを意味し，ゆえに $\mathcal{F}$ は $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密である．

K の任意の閉部分集合 B に対し $B^{\mathcal{F}} = B$ であることの証明は，上述の定理 2.54 の（定理 2.55 を用いた）証明の第 2 段落と全く同様である． □

第 2 章参考文献

本章で取り扱った抵抗形式の一般論は [27] において初めて導入され，[28, Chapter 2] で整理された後 [29, 31] でさらに詳しく研究されたものである．本章の記述は主に [28, Chapter 2] に従っているが，[31] で新しく得られた結果も一部盛り込んだ．

2.1 節の記述は，定理 2.16-(2) の証明と補題 2.20 以外は [28, Section 2.1] に従った．補題 2.20 とその証明は [31, Proof of Theorem 4.3] から採った．[28, Section 2.1] では定理 2.16-(2) は $\#V$ についての数学的帰納法を用いた具体的な計算により証明されている．ここで与えた補題 2.20 に基づく定理 2.16-(2) の証明も専門家には事実上既知であるはずだが，同じ証明を与えている文献の心当たりは筆者にはない．なお，2.1 節では有限集合上の Dirichlet 形式の解析的側面のみを取り扱ったが，これは実は有限集合上の Markov 連鎖を用いて確率論的に理解することが可能である．そういった確率論的側面の詳しい記述は例えば熊谷隆氏による日本語の教科書 [33, 第 3 章] で与えられているので合わせて参照されたい．

2.2 節の記述は [28, Section 2.2] に従った．

2.3 節は [28, Section 2.3] の記述を [31, Chapters 2–6 and 8] の内容と融合させ整理・改良するとともに，[28, Theorem 2.3.6] では省略されていた定理 2.36 の正確な主張と証明，及び抵抗形式の Markov 性にまつわる定理 2.38, 系 2.39 を補ったものである．補題 2.27 は [31, Proposition 3.2] から採った．定理 2.29 は [31, Chapter 8] によるが，そこでは仮定されていた $(K, R_\mathcal{E})$ の可分性を必要としない証明を本稿では与えた．定理 2.38, 系 2.39 と同様の性質は一般の Dirichlet 形式に対しても（多少の修正の下で）成り立つことが知られているが，これについては [12, Section 1.4], [11, Section 1.1], [41, Section I.4], [9, Sections I.2 and I.3] を参照のこと．定義 2.46 と命題 2.47 は [31, Chapter 2] から，命題 2.48, 定理 2.49, 定義 2.50, 命題 2.51, 定理 2.52 は [31, Chapter 4] から，演習 2.5 と定理 2.53 は [31, Chapter 5] から，定理 2.54 は [31, Chapter 6] から，それぞれ採った．

第3章参考文献

本章の結果は[14,36,8,24]で本質的には得られていたのが[13]によってこの形に整理されたもの。さらなる詳細については[2,28,45]を参照のこと(特に[45, Chapter1], [28, Sections 3.1-3.3]が本章の内容に関係する)。

第3章 Sierpiński gasket上のLaplacianの構成

§3.1 有限部分集合上のLaplacianの適合列の構成

$V_0 := \{q_1, q_2, q_3\}$を$\mathbb{R}^2$内の正3角形の3頂点とし, $k \in \{1,2,3\}$に対し $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$を

$$f_k(x) := \frac{1}{2}(x + q_k)$$ で定める.

$m \geq 0$に対し帰納的に

$$V_{m+1} := \bigcup_{k=1}^{3} f_k(V_k)$$ と定める.

明らかに$V_0 \subset V_1$, これとmに関する帰納法より$\forall m \geq 0$, $V_m \subset V_{m+1}$も分かる.さらに

$$V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m, \quad K := \overline{V_*}^{\mathbb{R}^2} \qquad (3.1)$$

とおく. Kは$\mathbb{R}^2$の有界閉集合,従ってコンパクトであるが,さらに

$$\bigcup_{k=1}^{3} f_k(V_*) = \bigcup_{k=1}^{3} \bigcup_{m=0}^{\infty} f_k(V_m) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3} f_k(V_m) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_{m+1} = V_*$$

なので,この両辺の$\overline{(\cdots)}^{\mathbb{R}^2}$を取ることで次が分かる:

$$K = \bigcup_{k=1}^{3} f_k(K). \qquad (3.2)$$

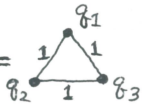
(実は,この等式をみたす$\mathbb{R}^2$の空でないコンパクト集合が唯1つしかないことも証明できる.)

Kを**Sierpiński gasket**と呼ぶ. (3.2)より特に$f_k(K) \subset K$なので, $F_k := f_k|_K$とおくとF_kはKからKへの連続な単射になる.次の著しい性質に注意しよう.

命題3.1 $F_1(K) \cap F_2(K) = \{F_1(q_2)\} = \{F_2(q_1)\}$,
$F_2(K) \cap F_3(K) = \{F_2(q_3)\} = \{F_3(q_2)\}$,
$F_3(K) \cap F_1(K) = \{F_3(q_1)\} = \{F_1(q_3)\}$.

証明 明らか. ■

さて, $L_0 \in \mathcal{LA}(V_0)$を $L_0 :=$



で定め, $m \geq 0$に対し$L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$を帰納的に

$L_{m+1} :=$

で定める.

対応する$\mathcal{E}_m := \mathcal{E}_{L_m} \in \mathcal{RF}(V_m)$の言葉で述べると,上の定義は$\mathcal{E}_m$を次のように定めることに他ならない:

$$\mathcal{E}_0(u,v) := \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} (u(q_j) - u(q_k))(v(q_j) - v(q_k)), \quad u, v \in \mathbb{R}^{V_0},$$

$$\mathcal{E}_{m+1}(u,v) := \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} \mathcal{E}_m(u \circ F_k, v \circ F_k), \quad u, v \in \mathbb{R}^{V_{m+1}}, \qquad (3.3)$$

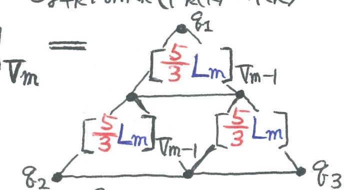
ただし$r_k := \frac{3}{5}$.

命題3.2 $\mathcal{S} := \{(V_m, L_m)\}_{m=0}^{\infty}$は有限集合上のLaplacianの適合列である.

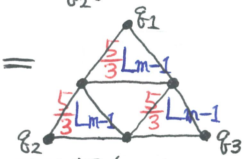
証明 $[L_1]_{V_0} = L_0$は演習2.3で示した.
$m \geq 1$に対しては, $V_1 \subset V_m$なので, $[L_m]_{V_{m-1}} = L_{m-1}$と仮定すると

$\bigcup_{j \neq k} K_j \cap K_k$ ($F_k(K) =: K_k$)

$[L_{m+1}]_{V_m} =$



$=$



$= L_m.$

よって数学的帰納法により$\forall m \geq 0$, $[L_{m+1}]_{V_m} = L_m$. ■

そこで$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \mathcal{E}_{\mathcal{S}}, R_{\mathcal{S}}$が定義2.22により定まる.そして§2.2,および§2.3の冒頭で述べたように

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}}) \in \mathcal{RF}(V_*), \quad R_{\mathcal{S}} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}} \in \mathcal{RM}(V_*).$$

また:

命題3.3 $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \{u \in \mathbb{R}^{V_*} \mid \forall k \in \{1,2,3\}, u \circ F_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}$かつ$\forall u, v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,v) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u \circ F_k, v \circ F_k).$$

証明 $u \in \mathbb{R}^{V_*}$とする. (3.3)で$m \to \infty$とすると,

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u|_{V_m}, u|_{V_m}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(u \circ F_k|_{V_m}, u \circ F_k|_{V_m})$$

なので, $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \Leftrightarrow$ (右辺) $< \infty$
$\Leftrightarrow$ (右辺の各項) $< \infty$
$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,3\}, u \circ F_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$.

さらに$u, v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$に対し, (3.3)で$u, v$の代わりに$u|_{V_{m+1}}, v|_{V_{m+1}}$として$m \to \infty$とすれば

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,v) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{r_k} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u \circ F_k, v \circ F_k)$$ を得る. ■

§3.2 Euclid距離と有効抵抗距離の同値性

§3.1の$(\mathcal{E}_s,\mathcal{F}_s)$に系2.43(と定理2.54)を適用するためには，(V_*,R_s)の完備化が位相空間としてK(をEuclid距離の制限により距離空間とみなしたもの)と同一視できることを示す必要がある。本§ではこれを実行する。$r:=\frac{3}{5}$とおく。

補題3.4 $\forall m\in\mathbb{N}$, $\forall w=w_1w_2\cdots w_m\in\{1,2,3\}^m$, $\forall x,y\in V_*$, $R_s(F_w(x),F_w(y))\le r^m R_s(x,y)$, ただし $F_w:=F_{w_1}\circ\cdots\cdots\circ F_{w_m}$.

証明 m,w,x,yを主張のように取る。このとき $\forall u\in\mathcal{F}_s\setminus\mathbb{R}1_{V_*}$ に対し，命題3.3の等式をm回用いることで次が分かる:

$$\mathcal{E}_s(u,u)=\sum_{v\in\{1,2,3\}^m}\frac{1}{r^m}\mathcal{E}_s(u\circ F_v,u\circ F_v) \ge \frac{1}{r^m}\mathcal{E}_s(u\circ F_w,u\circ F_w).$$

従って:

● $u(F_w(x))=u(F_w(y))$のときは，

$$\frac{|u(F_w(x))-u(F_w(y))|^2}{\mathcal{E}_s(u,u)}=0\le r^m R_s(x,y).$$

● $u(F_w(x))\ne u(F_w(y))$のときは，$u\circ F_w\in\mathcal{F}_s\setminus\mathbb{R}1_{V_*}$なので$\mathcal{E}_s(u\circ F_w,u\circ F_w)>0$であり，よって

$$\frac{|u(F_w(x))-u(F_w(y))|^2}{\mathcal{E}_s(u,u)}\le\frac{|u\circ F_w(x)-u\circ F_w(y)|^2}{r^{-m}\mathcal{E}_s(u\circ F_w,u\circ F_w)}\le r^m R_s(x,y).$$

そこで$\sup_{u\in\mathcal{F}_s\setminus\mathbb{R}1_{V_*}}$を取れば主張を得る。■

補題3.5 $\mathrm{diam}_{R_s}V_*:=\sup_{x,y\in V_*}R_s(x,y)<\infty$.

証明 $x\in V_*$を任意に取る。このとき$\exists m\ge1$, $x\in V_m$であり，するとさらに$\exists w\in\{1,2,3\}^m$, $x\in F_w(V_0)$となるので，$\exists k\in\{1,2,3\}$, $x=F_w(q_k)$. さて，$w=w_1\cdots w_m$と表記することとし，$\{x_l\}_{l=0}^m\subset V_m$を$x_0:=q_1$, $x_l:=F_{w_1\cdots w_l}(q_k)$, $1\le l\le m$で定める。すると$x_m=x$であり，また各$l\in\{1,\cdots,m\}$に対し$x_{l-1},x_l\in F_{w_1\cdots w_{l-1}}(V_1)$ ($l=1$のとき$x_0,x_1\in V_1$)なので補題3.4により

$$R_s(x_{l-1},x_l)\le r^{l-1}\cdot\max_{y,z\in V_1}R_s(y,z).$$

ゆえにR_sに対する3角不等式から

$$\begin{aligned}R_s(q_1,x)&=R_s(x_0,x_m)\\&\le\sum_{l=1}^m R_s(x_{l-1},x_l)\\&\le\sum_{l=1}^m r^{l-1}\cdot\max_{y,z\in V_1}R_s(y,z)\\&\le\frac{1}{1-r}\max_{y,z\in V_1}R_s(y,z).\end{aligned}$$

よって$\forall x,y\in V_*$,

$$R_s(x,y)\le R_s(q_1,x)+R_s(q_1,y)\le\frac{2}{1-r}\max_{p,q\in V_1}R_s(p,q).$$

■

$\boxed{\text{補題3.6}}$ $\alpha:=\log_2\frac{5}{3}$とおく。このとき$\exists c_1,c_2\in(0,\infty)$, $\forall x,y\in V_*$,

$$c_1|x-y|^\alpha\le R_s(x,y)\le c_2|x-y|^\alpha.$$

証明 $x\ne y$となる$x,y\in V_*$を任意に取る。($\forall j\ne k\in\{1,2,3\}$, $|q_j-q_k|=1$と仮定しておく。)
$m\ge0$が$2^{-m}<\frac{1}{2}|x-y|$をみたすならば$x\in F_w(V_*)$, $y\in F_v(V_*)$となる$w,v\in\{1,2,3\}^m$に対し$F_w(V_*)\cap F_v(V_*)=\emptyset$であることに注意(実際，$q\in F_w(V_*)\cap F_v(V_*)$が存在すると仮定すると$|x-y|\le|x-q|+|q-y|\le2^{-m}+2^{-m}<|x-y|$で矛盾)して，$n=n_{x,y}\in\mathbb{N}$を次で定める:

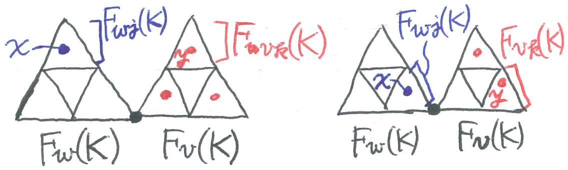
$$n:=\max\left\{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,\middle|\,\begin{array}{l}\exists w,v\in\{1,2,3\}^m,\ x\in F_w(V_*),\\ y\in F_v(V_*),\ F_w(V_*)\cap F_v(V_*)\ne\emptyset\end{array}\right\}.$$

($m=0,1$はこの条件をみたし，この集合は有限なので，$n\in\mathbb{N}$.)
するとこのnに対し，$w,v\in\{1,2,3\}^n$を$x\in F_w(V_*)$, $y\in F_v(V_*)$, $F_w(V_*)\cap F_v(V_*)\ne\emptyset$となるように取れるので，$n=n_{x,y}$を定義する直前の考察から$2^{-n}\ge\frac{1}{2}|x-y|$すなわち$|x-y|\le2^{1-n}$であり，他方$q\in F_w(V_*)\cap F_v(V_*)$を取ることができて，$q=F_w(q_w)=F_v(q_v)$となる$q_w,q_v\in V_*$が存在し，よって補題3.4，補題3.5により

$$\begin{aligned}R_s(x,y)&\le R_s(F_w(x_0),F_w(q_w))+R_s(F_v(q_v),F_v(y_0))\\&\overset{\text{補題3.4}}{\le} r^n\cdot R_s(x_0,q_w)+r^nR_s(q_v,y_0)\\&\le 2r^n\cdot\underbrace{\sup_{x',y'\in V_*}R_s(x',y')}_{<\infty\ \text{補題3.5}}\end{aligned}$$

(ただし$x_0,y_0\in V_*$を$x=F_w(x_0)$, $y=F_v(y_0)$となるように取った).

一方, $n=n_{x,y}$ の最大性により, ある $k\in\{1,2,3\}$ を $x\in F_{wj}(V_*)$, $y\in F_{vk}(V_*)$ となるように取ると $F_{wj}(V_*)\cap F_{vk}(V_*)=\emptyset$ である. すると ($F_j(V_*)\cap F_k(V_*)\neq\emptyset$ より $w\neq v$ でなければならず)



上図のように $F_{wj}(K)$ と $F_{vk}(K)$ の相対的な配置の可能性は有限通りに限られ, そのいずれの場合もその間の Euclid 距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$ 以上である. よって $|x-y|\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}2^{-n-1}$.

最後に $\Lambda:=\left\{\tau\in\{1,2,3\}^{n+1}\;\middle|\;F_{wj}(K)\cap F_\tau(K)\neq\emptyset\right\}$ とおき, $u\in\mathbb{R}^{V_*}$ を次で定める: $\bullet_1$ $u|_{F_{wj}(V_*)}:=1$,

$\bullet_2$ $\forall\tau\in\Lambda\setminus\{wj\}$, $u\circ F_\tau$ は $(\mathcal{E}_s,\mathcal{F}_s)$ に関して V_0-調和で, $F_\tau(V_0)\cap F_{wj}(V_0)$ では 1, $F_\tau(V_0)\setminus F_{wj}(V_0)$ では 0.

$\bullet_3$ $\forall\tau'\in\{1,2,3\}^{n+1}\setminus\Lambda$, $u|_{F_{\tau'}(V_*)}:=0$.

$\bullet_1$ と $\bullet_3$ の共通部分はなく, $\bullet_1$ と $\bullet_2$ の共通部分は $F_\tau(V_0)\cap F_{wj}(V_0)$ だがその上では1で一致, $\bullet_2$ と $\bullet_3$ の共通部分は $F_\tau(V_0)\cap F_{\tau'}(V_0)\setminus F_{wj}(V_0)$ だがその上では0で一致, よって $u\in\mathbb{R}^{V_*}$ は上で矛盾なく定義されており, このとき $\forall\tau\in\{1,2,3\}^{n+1}$, $u\circ F_\tau\in\mathcal{F}_s$ なので命題3.3より $u\in\mathcal{F}_s$. また $u(x)=1$, $u(y)=0$ であるので, 命題3.3より

$$R_s(x,y)\geqq\mathcal{E}_s(u,u)^{-1}$$
$$\overset{\text{命題3.3}}{=}\left(\sum_{\tau\in\{1,2,3\}^{n+1}}r^{-n-1}\mathcal{E}_s(u\circ F_\tau,u\circ F_\tau)\right)^{-1}$$
$$\overset{\text{命題2.23-(2.35)}}{=}\left(\sum_{\tau\in\Lambda\setminus\{wj\}}r^{-n-1}\mathcal{E}_0(\mathbb{1}^{V_0}_{q_1},\mathbb{1}^{V_0}_{q_1})\right)^{-1}$$
$$(\#\Lambda\leqq4\text{に注意})=\left(2r^{-n-1}(\#\Lambda-1)\right)^{-1}\geqq\frac{1}{6}r^{n+1}.$$

以上の $|x-y|$, $R_s(x,y)$ に対する上下の評価および $2^\alpha=r$ から, 主張が得られる. ■

定理3.7 $\exists^1 R:K\times K\to[0,\infty)$ K上の距離関数, $id_K:(K,|\cdot-\cdot|)\to(K,R)$ は連続かつ $R|_{V_*\times V_*}=R_s$. さらに $\forall x,y\in K$, $C_1|x-y|^\alpha\leqq R(x,y)\leqq C_2|x-y|^\alpha$.

証明 まず, K上の任意の距離関数 ρ に対し,
$$\forall x,y,z,w\in K,\ |\rho(x,y)-\rho(z,w)|\leqq\rho(x,z)+\rho(y,w)\tag{3.4}$$
が3角不等式から得られることに注意する.

$x,y\in K$ を任意に取り, Euclid距離の下で V_* が K において稠密であることに注意して, V_* の点列
$$\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{x_n'\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n'\}_{n=1}^\infty\subset V_*$$
を $|x_n-x|\vee|x_n'-x|\vee|y_n-y|\vee|y_n'-y|\xrightarrow{n\to\infty}0$ となるように取る. このとき $\forall k,l\in\mathbb{N}$ に対し補題3.6より
$$0\leqq R_s(x_k,x_l)\leqq C_2|x_k-x_l|^\alpha\leqq C_2(|x_k-x|+|x-x_l|)^\alpha\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0,$$
同様にして $R_s(x_k',x_l')\vee R_s(y_k,y_l)\vee R_s(y_k',y_l')\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0$.
すると(3.4)より $\forall k,l\in\mathbb{N}$,
$$|R_s(x_k,y_k)-R_s(x_l,y_l)|\leqq R_s(x_k,x_l)+R_s(y_k,y_l)\xrightarrow{k\wedge l\to\infty}0$$
となるので, $\{R_s(x_n,y_n)\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ は Cauchy列であり, 従って $a:=\lim_{n\to\infty}R_s(x_n,y_n)\in\mathbb{R}$ が存在する. 同様に極限 $b:=\lim_{n\to\infty}R_s(x_n',y_n')$ も存在するが, ここでさらに(3.4)より $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$0\leqq|R_s(x_n,y_n)-R_s(x_n',y_n')|\leqq R_s(x_n,x_n')+R_s(y_n,y_n')$$
$$\overset{\text{補題3.6}}{\leqq}C_2(|x_n-x_n'|^\alpha+|y_n-y_n'|^\alpha)\leqq C_2((|x_n-x|+|x-x_n'|)^\alpha+(|y_n-y|+|y-y_n'|)^\alpha)$$
なので $n\to\infty$ として $0\leqq|a-b|\leqq0$, すなわち $a=b$ となる. これは極限 $\lim_{n\to\infty}R_s(x_n,y_n)$ が $|x_n-x|\vee|y_n-y|\xrightarrow{n\to\infty}0$ となる $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset V_*$ の取り方に依らないことを意味しており, そこで $R(x,y):=\lim_{n\to\infty}R_s(x_n,y_n)$ とおくことで $R:K\times K\to\mathbb{R}$ が定義できることになる.
このとき明らかに $R(x,y)=R(y,x)\geqq0$ であり, R が3角不等式をみたすことは R_s の3角不等式の極限を取ることで分かり, また補題3.6で x,y の代わりに x_n,y_n として $n\to\infty$ とすることで $C_1|x-y|^\alpha\leqq R(x,y)\leqq C_2|x-y|^\alpha$ も分かる. 特に $x=y$ なら $R(x,y)=0$, $x\neq y$ なら $R(x,y)>0$ となり, ゆえに R は K上の距離関数で, また $id_K:(K,|\cdot-\cdot|)\to(K,R)$ は同相(特に連続)となる. $x,y\in V_*$ のときは, $x_n:=x$, $y_n:=y$ という点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset V_*$ が取れ, 従って

$R(x,y)=\lim_{n\to\infty}R_{\mathcal{S}}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}R_{\mathcal{S}}(x,y)=R_{\mathcal{S}}(x,y)$ となる. すなわち $R|_{V_*\times V_*}=R_{\mathcal{S}}$.

最後に R の一意性は, 先のような $x,y\in K$ および点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset V_*$ に対し, $id_K:(K,|\cdot-\cdot|)\to(K,R)$ が連続ならば $\lim_{n\to\infty}R(x,x_n)\vee R(y,y_n)=0$, 従って(3.4)より $0\leq|R(x,y)-R(x_n,y_n)|\leq R(x,x_n)+R(y,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ なので $R(x,y)=\lim_{n\to\infty}R(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}R_{\mathcal{S}}(x_n,y_n)$ でなくてはならないことから分かる. ■

定理3.7の (K,R) および有限集合上のLaplacianの適合列 $\mathcal{S}=\{(V_m,L_m)\}_{m=0}^{\infty}$ に系2.43(と命題3.3)を適用することで, 我々の当初からの目標であった次の定理を得る.

定理3.8 $\mathcal{F}\subset C(K)$ と $\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}:=\{u\in C(K)\mid \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_m(u|_{V_m},u|_{V_m})<\infty\},$$
$$\mathcal{E}(u,v):=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_m(u|_{V_m},v|_{V_m})\in\mathbb{R},\quad u,v\in\mathcal{F}$$

で定めると, $(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$, かつ $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の有効抵抗距離 $R_{\mathcal{E}}=R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ は定理3.7の距離関数 R に一致し, 特に $R_{\mathcal{E}}$ が定める K 上の位相はEuclid距離(の K への制限)が定める位相に一致する. さらに

$$\mathcal{F}=\{u\in C(K)\mid \forall k\in\{1,2,3\},\ u\circ F_k\in\mathcal{F}\}, \quad (3.5)$$
$$\forall u,v\in\mathcal{F},\quad \mathcal{E}(u,v)=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{r}\mathcal{E}(u\circ F_k,v\circ F_k). \quad (3.6)$$

証明 $\mathcal{F}=\{u\in C(K)\mid u|_{V_*}\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}$ であり, かつ $\forall u,v\in\mathcal{F}$, $\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u|_{V_*},v|_{V_*})$ であることに注意すると, 「さらに」以前の主張は定理3.7と系2.43より, また「さらに」以降の主張は命題3.3より, それぞれ従う. ■

定義3.9 定理3.8の $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を, Sierpiński gasket K 上の標準抵抗形式(the standard resistance form)という.

「熱拡散が連続的である」ことを保証するためには $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的であることを示す必要があるが, これは「$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の自己相似性(self-similarity)」(3.5), (3.6)の簡単な帰結として自動的に従う. すなわち, 次の命題が成り立つ.

命題3.10 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は強局所的(strongly local)である, すなわち v が $\mathrm{supp}_K[u]$ のある開近傍上で定数であるような任意の $u,v\in\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(u,v)=0$.

証明 $A:=\mathrm{supp}_K[u]$ とおく. 定義により $A=\overline{u^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}^{K}$ であり, 従って A は K の閉部分集合かつ $u|_{K\setminus A}=0$ である. $A=\emptyset$ のときは $u=0$ となり $\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}(0,v)=0$, そこで以下 $A\neq\emptyset$ と仮定する. u,v に対する仮定により, K の開部分集合 U で $A\subset U$ かつ $v|_U$ は定数となるものを取ることができる. $U=K$ のときは $v|_U=v$ が定数, すなわち $v\in\mathbb{R}\mathbb{1}_K$ なので $\mathcal{E}(u,v)=0$ が分かり, そこで以下さらに $U\neq K$ すなわち $K\setminus U\neq\emptyset$ と仮定する.

さて, $x\in K$ に対し $\mathrm{dist}(x,K\setminus U):=\inf_{y\in K\setminus U}|x-y|$ と定めると, Euclid距離に対する3角不等式と $K\setminus U\neq\emptyset$ より $\mathrm{dist}(\cdot,K\setminus U):K\to[0,\infty)$ かつこれは連続であることが容易に確認でき, さらに U が K の開集合であることから $\forall x\in U$, $\mathrm{dist}(x,K\setminus U)>0$ が従う. ここで A はコンパクト位相空間 K の閉部分集合としてそれ自身コンパクトであり, 従って A 上の実数値連続関数 $\mathrm{dist}(\cdot,K\setminus U)|_A$ は最小値 $\delta:=\min_{z\in A}\mathrm{dist}(z,K\setminus U)$ を持つが, $A\subset U$ よりこの A 上の関数は $(0,\infty)$-値であるので $\delta>0$. そこで $m\in\mathbb{N}$ を $2^{-m}<\delta$ となるように取る. このとき, 各 $w\in\{1,2,3\}^m$ に対し次(のうちのいずれか1つ)が成り立つ:

- $A\cap F_w(K)=\emptyset$ すなわち $F_w(K)\subset K\setminus A$ のときは, $u|_{K\setminus A}=0$ より $u|_{F_w(K)}=0$ なので, $u\circ F_w=0$.
- $A\cap F_w(K)\neq\emptyset$ のときは, $z\in A\cap F_w(K)$ を取ることができ, すると $\forall x\in F_w(K)$,
  $$|z-x|\leq 2^{-m}<\delta\leq\mathrm{dist}(z,K\setminus U)$$
  より $x\notin K\setminus U$ すなわち $x\in U$ となるので, $F_w(K)\subset U$. ところがこのとき $v|_U$ は定数なので $v|_{F_w(K)}$ も定数であり, よって $v\circ F_w\in\mathbb{R}\mathbb{1}_K$.

以上から, $\forall w\in\{1,2,3\}^m$, ((3.5)より $u\circ F_w, v\circ F_w\in\mathcal{F}$ かつ) $\mathcal{E}(u\circ F_w,v\circ F_w)=0$ となり, 従って(3.6)により

$$\mathcal{E}(u,v)=\sum_{w\in\{1,2,3\}^m}r^{-m}\mathcal{E}(u\circ F_w,v\circ F_w)=0.$$

ゆえに $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は強局所的である. ■

参考文献

[1] M. T. Barlow, Diffusions on fractals, in: *Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1995)*, Lecture Notes in Math., vol. 1690, Springer, Berlin, 1998, pp. 1–121.

[2] M. T. Barlow, Analysis on the Sierpinski carpet, in: *Analysis and Geometry of Metric Measure Spaces: Lecture Notes of the 50th Seminaire de Mathematiques Superieures (SMS), Montreal, 2011*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 27–54.

[3] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), 225–257.

[4] M. T. Barlow and R. F. Bass, Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet, *Probab. Theory Related Fields* **91** (1992), 307–330.

[5] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), 673–744.

[6] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets, *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), 655–701.

[7] M. T. Barlow and J. Kigami, Localized eigenfunctions of the Laplacian on p.c.f. self-similar sets, *J. London Math. Soc.* **56** (1997), 320–332.

[8] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Probab. Theory Related Fields* **79** (1988), 543–623.

[9] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, de Gruyter Stud. Math., vol. 14, Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[10] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Math., vol. 115, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[11] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, London Math. Soc. Monogr., vol. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.

[12] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[13] M. Fukushima and T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **1** (1992), 1–35.

[14] S. Goldstein, Random walks and diffusions on fractals, in: H. Kesten (ed.), *Percolation Theory and Ergodic Theory of Infinite Particle Systems*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 121–129.

[15] M. Hino, On singularity of energy measures on self-similar sets, *Probab. Theory Related Fields* **132** (2005), 265–290.

[16] M. Hino, Martingale dimensions for fractals, *Ann. Probab.* **36** (2008), 971–991.

[17] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, *Proc. London Math. Soc.* **100** (2010), 269–302.

[18] M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 739–793.

[19] N. Kajino, On-diagonal oscillation of the heat kernels on post-critically finite self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 51–74.

[20] N. Kajino, Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket, in: Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics I: Fractals in Pure Mathematics, *Contemp. Math.*, vol. 600, 2013, pp. 91–133.

[21] N. Kajino, Non-regularly varying and non-periodic oscillation of the on-diagonal heat kernels on self-similar fractals, in: Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II: Fractals in Applied Mathematics, *Contemp. Math.*, vol. 601, 2013, pp. 165–194.

[22] N. Kajino, Log-periodic asymptotic expansion of the spectral partition function for self-similar sets, *Comm. Math. Phys.* **328** (2014), 1341–1370.

[23] N. Kajino, *The Laplacian on the Apollonian gasket and Weyl's asymptotics for its eigenvalues*, in preparation.

[24] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces, *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), 259–290.

[25] J. Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 721–755.

[26] J. Kigami, Effective resistances for harmonic structures on p.c.f. self-similar sets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), 291–303.

[27] J. Kigami, Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 48–86.

[28] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math., vol. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[29] J. Kigami, Harmonic analysis for resistance forms, *J. Funct. Anal.* **204** (2003), 399–444.

[30] J. Kigami, Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets, *Mem. Amer. Math. Soc.* **199** (2009), no. 932.

[31] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[32] T. Kumagai, Short time asymptotic behaviour and large deviation for Brownian motion on some affine nested fractals, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **33** (1997), 223–240.

[33] 熊谷 隆「確率論」，新しい解析学の流れ，共立出版，2003.

[34] T. Kumagai, *Random Walks on Disordered Media and their Scaling Limits*, Lecture Notes in Math., vol. 2101, Springer, 2014.

[35] 熊谷 隆「複雑な系の上の異常拡散現象の解析」,『数学』第 70 巻第 1 号 (2018), 81–100.

[36] S. Kusuoka, A diffusion process on a fractal, in: K. Ito and N. Ikeda (eds.), *Probabilistic Methods in Mathematical Physics (Katata/Kyoto, 1985)*, Academic Press, Boston, MA, 1987, pp. 251–274.

[37] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **25** (1989), 659–680.

[38] S. Kusuoka, Lecture on diffusion processes on nested fractals, in: *Statistical Mechanics and Fractals*, Lecture Notes in Math., vol. 1567, Springer, Berlin, 1993, pp. 39–98.

[39] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), 169–196.

[40] T. Lindstrøm, Brownian motion on nest fractals, *Mem. Amer. Math. Soc.* **83** (1990), no. 420.

[41] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[42] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra's Pears: The Vision of Felix Klein*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[43] H. Oh, Apollonian circle packings: dynamics and number theory, *Jpn. J. Math.* **9** (2014), 69–97.

[44] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math. (2)* **147** (1998), 225–267.

[45] R. S. Strichartz, *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006.

[46] 砂田 利一「基本群とラプラシアン：幾何学における数論的方法」，紀伊國屋数学叢書 29，紀伊国屋書店，1988.

[47] 内田 伏一「集合と位相」，数学シリーズ，裳華房，1986.