

第 1 回レポート (演習問題 2)

締め切り: 2019 年 1 月 10 日 (木) 13:15

提出先: 数学専攻事務室 (理学部 B 棟 4 階 B410 号室)

以下の問題 2.1~2.3 に可能な限り多く解答し, レポートとして提出すること。

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと。試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない。
- 数学的に厳密な議論を行うこと。厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない。
- 数学的内容の理解の為に他者と相談するのは構わないが, レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず, 自分の言葉で解答すること。

問題 2.1. X を可算集合, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty]$ とし, $\mu_\varphi: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を次で定める:

$$\mu_\varphi(A) := \sum_{x \in A} \varphi(x) = \sum_{x \in X} \varphi(x) \mathbf{1}_A(x), \quad A \subset X \quad (\text{ただし } A = \emptyset \text{ のときは } \sum_{x \in \emptyset} \varphi(x) := 0).$$

- (1) **(やや難)** μ_φ は $(X, 2^X)$ 上の測度であることを示せ。
- (2) **(易)** 任意の $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は 2^X -可測であることを示せ。
- (3) $f: X \rightarrow [0, \infty]$ とする。 $\int_X f d\mu_\varphi = \sum_{x \in X} f(x)\varphi(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) のヒント: X が有限のときは f を $f = \sum_{x \in X} f(x) \mathbf{1}_{\{x\}}$ と有限和の形に書けることから従う。 X が可算無限のときは, 全単射 $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ を取って f を $f_n := \sum_{k=1}^n f(x_k) \mathbf{1}_{\{x_k\}}$ で定まる非負関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ で近似し, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\int_X f_n d\mu_\varphi$ を求めた後で単調収束定理を用いよ。

問題 2.2. 次の (1)~(3) の各場合について, 実確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\text{var}(X)$ を求めよ。

- (1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0, 1]$ の二項分布 $B(n, p)$ のとき。
- (2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0, \infty)$ の Poisson 分布 $\text{Po}(\lambda)$ のとき。
- (3) X の分布がパラメータ $\alpha \in [0, 1)$ の幾何分布 $\text{Geom}(\alpha)$ のとき。

問題 2.3. 次の (1)~(4) の各場合について, 実確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\text{var}(X)$ を求めよ。

- (1) X の分布が $[a, b]$ 上の一様分布 $\text{Unif}(a, b)$ のとき ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$)。
- (2) X の分布がパラメータ $\alpha \in (0, \infty)$ の指数分布 $\text{Exp}(\alpha)$ のとき。
- (3) X の分布がパラメータ $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ のガンマ分布 $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ のとき。
- (4) X の分布が (Lebesgue 測度に関して) 密度 $\rho_X(x) = (1 - |1 - x|)^+$ を持つとき。