

第 2 回レポート (演習問題 3)

締め切り: 2019 年 1 月 25 日 (金) 10:00

提出先: 数学専攻事務室 (理学部 B 棟 4 階 B410 号室)

以下の問題 3.1~3.2 に可能な限り多く解答し, レポートとして提出すること。

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 数学的に厳密な議論を行うこと. 厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない.
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが, レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず, 自分の言葉で解答すること.

問題 3.1. X, Y を実確率変数とし, $\{X, Y\}$ は独立, かつ $X \sim \text{Unif}(0, 1), Y \sim \text{Unif}(0, 1)$ であるとする. このとき次の期待値を求めよ.

(1) $\mathbb{E}[\max\{X, Y\}]$ (2) $\mathbb{E}[\min\{X, Y\}]$ (3) $\mathbb{E}[\max\{X, Y\} \cdot \min\{X, Y\}]$ (4) $\mathbb{E}[X^2 Y e^{-XY^2}]$

問題 3.2. X を実確率変数とし, その特性関数 $\varphi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する:

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}$$

(ただし i は虚数単位を表すものとする). このとき任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つことを示せ.(1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0, 1]$ の二項分布 $B(n, p)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = (1 + p(e^{it} - 1))^n.$$

(2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0, \infty)$ の Poisson 分布 $\text{Po}(\lambda)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

(3) X の分布がパラメータ $\alpha \in [0, 1)$ の幾何分布 $\text{Geom}(\alpha)$ のとき,

$$\varphi_X(t) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{it}}.$$

(4) X の分布が $[-a, a]$ 上の一様分布 $\text{Unif}(-a, a)$ のとき ($a \in (0, \infty)$),

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin at}{at} \quad (\text{ただし } \frac{\sin 0}{0} := 1 \text{ と定める}).$$

(5) X の分布が (Lebesgue 測度に関して) 密度 $\rho_X(x) = \frac{1}{4}(2 - |x|)^+$ を持つとき,

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \quad (\text{ただし } \frac{\sin 0}{0} := 1 \text{ と定める}).$$

注意. 問題 3.2 の解答に際しては, 複素数値関数の積分に関する次の定義と事実注意到 (講義ノートの 8.0 節も合わせて参照されたい):(1) (X, \mathcal{M}) を可測空間, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ とする. f の実部 $\text{Re}(f)$ と虚部 $\text{Im}(f)$ が共に (\mathbb{R} -値関数として) \mathcal{M} -可測であるとき, f は (\mathbb{C} -値関数として) \mathcal{M} -可測であるという.(2) (X, \mathcal{M}, μ) を測度空間とし, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ は \mathcal{M} -可測とする. $\text{Re}(f), \text{Im}(f) \in L^1(\mu)$ であるとき f は μ -可積分であるといい, そのとき $\int_X f d\mu := \int_X \text{Re}(f) d\mu + i \int_X \text{Im}(f) d\mu$ と定める.(3) X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実確率変数とし, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は有界で $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測とする. このとき $f(X) := f \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は \mathcal{F} -可測で, 講義中の **定理 2.10-(2) の等式** $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}_X(dx)$ が成り立つ. さらに X の分布が定理 2.11-(1) もしくは命題 2.14-(1) の形の測度であるとき, $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}_X(dx)$ に **定理 2.11-(2), 命題 2.14-(2) の等式が適用でき**, かつ後者の等式中の級数は絶対収束する. そこで $f(x) = e^{itx}$ の場合を考えることで $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ が計算できる.