

演習問題2 (2019年11月19日)

問題 2.1. ガンマ関数 $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を, $\alpha > 0$ に対し収束する広義積分 $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ により定義する. このとき任意の $\alpha > 0$ に対し $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ が成り立つことを示せ.

問題 2.2. 次の重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,1] \times [0,1]} \max\{x, y^2\} dx dy \quad (2) \iint_{[0,1] \times [0,1]} x^2 y e^{-xy^2} dx dy \quad (3) \iint_{[0,1] \times [1,3]} x^y dx dy$$

問題 2.3. 広義積分 $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ が絶対収束し、さらにその値が具体的に求まることを示そう。

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ であることを示せ。

(2) $0 < x \leq 1$ の範囲での関数 $x^{1/2} \log x$ の最大値・最小値を求めよ。

(3) 広義積分 $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ は絶対収束することを示せ。

(ヒント： $\int_0^1 \log \sin x \, dx$ の絶対収束を示せばよい。(1), (2) を用いて定理 1.51 の条件の成立を示せ。)

(4) 広義積分 $\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx$, $\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$ は共に絶対収束し

$$\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

であることを示せ。(ヒント： $\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx$, $\int_{\pi/2}^{\pi} \log \sin x \, dx$ に置換積分を行い(3)に帰着させよ。)

(5) 広義積分 $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ の値を求めよ。

(ヒント：広義積分 $\int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$ に対し $x = 2u$ とおいて置換積分を行った後、(4)を用いよ。)

- 問題 2.4.** (1) (0 のまわりでの) 広義積分 $\int_0^1 \frac{\tan x}{x^\alpha} dx$ が収束するような $\alpha \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.
(ヒント: 問題 2.3-(1) と同様の不等式を $\tan x$ に対して証明し, 命題 1.41, 定理 1.51 を用いよ.)
- (2) $\beta \in \mathbb{R}$ を固定するとき, (0 のまわりでの) 広義積分 $\int_0^1 \frac{(1 - \cos x)^\beta}{x^\alpha} dx$ が収束するような $\alpha \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.

問題 2.5. (1) 次で定義される関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[0, 1]$ 上でリーマン積分可能でないことを示せ：

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}), \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}). \end{cases}$$

(2) (難) 次で定義される関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[0, 1]$ 上でリーマン積分可能であることを示し, $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ (ただし \mathbb{N} は正の整数全体の集合を, \mathbb{Z} は整数全体の集合をそれぞれ表す)：

$$f(x) := \begin{cases} (\min\{n \in \mathbb{N} \mid nx \in \mathbb{Z}\})^{-1} & (x \text{ が有理数のとき}), \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}). \end{cases}$$