§0. 序

▷サイコロを1つ投げる. 出目 $X\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

● Xは「確率変数」, 各目の出る確率 $\frac{1}{6}$:
$\forall k\in\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbb{P}[X=k]=\frac{1}{6}$.

● 他の「事象」の「確率」: 例えば
$\mathbb{P}[X\text{は奇数}]=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[X\text{は3の倍数}]=\frac{1}{3}$.

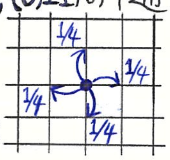
問題1 「確率変数」,「確率」,「事象」とは何か?
(数学的に厳密な定義が必要!)

▷サイコロを n 回投げる. k 回目の出目 X_k

● 経験的に次が成り立つ(大数の法則):
総試行回数 n がとても大きいとき, $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ の相加平均 $\frac{X_1+\cdots\cdots+X_n}{n}$ は X の「平均」(「期待値」)
$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$ に「非常に近い」.

問題2 大数の法則が成り立つ(はずな)のは何故?
また「非常に近い」とは正確にはどういう意味か?
~~答. 我々の経験による~~

▷硬貨を2枚投げる試行を n 回行い, (オ,オ) $(1,0)$, (オ,ウ) $(0,1)$, (ウ,オ) $(-1,0)$, (ウ,ウ) $(0,-1)$ と対応させ k 回目の試行の結果を X_k とおく. X_k は $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$ の4通りの値を確率 $\frac{1}{4}$ ずつで取る.
このとき $S_n:=X_1+\cdots\cdots+X_n$
(2次元単純ランダムウォーク)について:



問題3 n が非常に大きいとき, S_n の平均 $(0,0)$ からのずれ(ちらばり具合)はどの程度か?

この講義(と3年次配当「確率論」)の目標:
問題1,2,3(や類似の問題)に $\boxed{\text{数学的に厳密な形で}}$ 答えること!

「確率」を厳密に定式化するには?

▷Ω: 起こり得る全ての「場合」の集まり

▷各 $\Omega_0\subset\Omega$ に対し $\mathbb{P}[\Omega_0]\in[0,1]$ を対応させる
(Ω_0 の「確率」)

▷「確率変数」X は, 各「場合」$\omega\in\Omega$ に「試行の結果」$X(\omega)\in\mathbb{R}^d$ を対応させる
…… X は Ω 上の関数: $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$.

例 サイコロ1投: (#A: Aの元の個数)
$$\begin{cases}\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\\ \mathbb{P}[A]=\frac{\#A}{6},\ A\subset\Omega,\\ X:\Omega\to\mathbb{R},\ X(k)=k,\ \forall k\in\Omega.\end{cases}$$

▷「事象」(ランダムな試行の結果として起こる現象) A は, 各「場合」$\omega\in\Omega$ ごとに起きるか起きないか2つに1つ.
$\Omega_A:=\{\omega\in\Omega\mid\text{「場合」}\omega\text{ のとき }A\text{ が起こる}\}$
とおくと, 「A が起きる確率」=「Ω_A の確率」$=\mathbb{P}[\Omega_A]$.
そこで A を Ω_A と同一視する……「事象」とは, Ω の部分集合.

例 サイコロ1投では「Xは奇数」$\leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\text{は奇数}\}=\{1,3,5\}$,
「Xは3の倍数」$\leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\text{は3の倍数}\}=\{3,6\}$.

さらに $\mathbb{P}$ の満たすべき性質として:

● $\mathbb{P}[\emptyset]=0$, $\mathbb{P}[\Omega]=1$.

● $\{A_n\}_{n=1}^{N}$: 事象の列, $A_j\cap A_k=\emptyset$ ($\forall j\neq k$)
$\Rightarrow \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{N}A_n]=\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}[A_n]$.

無限集合や極限の取り扱いのためには $\boxed{N=\infty}$ が必要!
そのような(集合を変数とする非負値関数) $\mathbb{P}$ を測度という.

まとめると: 「確率」の数学的定式化

(1)
● Ω: 集合(標本空間)
● 各 $A\subset\Omega$ に $\mathbb{P}[A]\in[0,1]$ (事象Aの確率) を対応させる関数 $\mathbb{P}$ (測度)

(2) Ω 上の関数 $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$
(確率変数:「ランダムな試行の結果」)

本講義では専ら Ω が可算集合の場合を取り扱う.
(Ω が非可算集合の場合, 「$\mathbb{P}$ は測度である」という要件を満たしつつ $\mathbb{P}[A]$ を $\forall A\subset\Omega$ に対して定義することはできないのが普通である. ⟶ 測度論が必要!
(3年次配当「確率論」で取り扱う.))

記号と基本的事実

▷等式「$A:=B$」は「AをB(既知のもの)で定義する」の意味

▷$\mathbb{N}:=\{n \mid n$は正の整数$\}$, $\mathbb{Z}:=\{n \mid n$は整数$\}$,
$\mathbb{Q}:=\{q \mid q$は有理数$\}$, $\mathbb{R}:=\{x \mid x$は実数$\}$,
$\mathbb{C}:=\{z \mid z$は複素数$\}=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$($i$:虚数単位)

▷集合Ωに対し:

- $2^{\Omega}:=\{A \mid A\subset\Omega\}$($\Omega$のべき集合).
- 「$\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\Omega$」は「各$\lambda\in\Lambda$に対し$\omega_\lambda\in\Omega$」の意味($\Lambda$は集合). $\Lambda=\mathbb{N}$のときは「$\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Omega$」とも書く.
- Ω:可算無限 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全単射$\varphi:\mathbb{N}\to\Omega$が存在.(例:$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)
- Ω:可算 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Ωは有限もしくは可算無限.
- Ω:非可算 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Ωは可算でない.(例:$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
- Ωが可算かつ$A\subset\Omega$ $\Longrightarrow$ Aは可算.
- Ωが可算, Bは集合で$\varphi:\Omega\to B$は全射$\Rightarrow$$B$は可算
- $n\in\mathbb{N}$で$\Omega_1,\cdots\cdots,\Omega_n$は可算集合$\Rightarrow$$\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n$は可算
- 各$n\in\mathbb{N}$に対しA_nは可算集合$\Rightarrow$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$は可算.

§1. 実数と無限級数の基本事項

まず本§では無限級数に関する基本事項を復習する. 測度論への橋渡しを兼ねて, ここでは数列の項や極限に値として∞が現れる場合も含めて取り扱う.

定義1.1 (拡大実数系$[-\infty,\infty]$)

(1) $\mathbb{R}$に$\infty\notin\mathbb{R}$, $-\infty\notin\mathbb{R}$, $\infty\neq-\infty$なる元$\infty,-\infty$を付け加えた集合

$$[-\infty,\infty]:=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

を拡大実数系という.

$a,b\in[-\infty,\infty]$に対し次のように定義することで, $\mathbb{R}$上の通常の順序$\leqq$を$[-\infty,\infty]$上の全順序に拡張する:

$$a\leqq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} a=-\infty\text{ または }b=\infty\text{ または}\\ a,b\in\mathbb{R}\text{ かつ }\mathbb{R}\text{において }a\leqq b \end{array}\right.$$

(2) $A\subset[-\infty,\infty]$, $b\in[-\infty,\infty]$とする.

- bはAの($[-\infty,\infty]$における)上界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A,\ a\leqq b$.
- bはAの($[-\infty,\infty]$における)下界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A,\ a\geqq b$.
- $\{c\in[-\infty,\infty] \mid c$は$A$の上界/下界$\}$に最小値/最大値$M$が存在するとき, MをAの($[-\infty,\infty]$における)上限/下限(supremum/infimum, 最小上界/最大下界)といい$\sup A$/$\inf A$で表す.

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,\infty]$とする.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{smallmatrix}\infty\\-\infty\end{smallmatrix} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall b\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqq N,\ a_n\gtrless b.$$

(これを$a_n\xrightarrow{n\to\infty}\begin{smallmatrix}\infty\\-\infty\end{smallmatrix}$とも書き表す.)

命題1.2 $A\subset[-\infty,\infty]$, $A\neq\phi$とする. このときAの($[-\infty,\infty]$における)上限$\sup A$, 下限$\inf A$は存在する.

証明 $\sup A$の存在を示す($\inf A$の存在も全く同様に従う).

- $\forall b\in\mathbb{R},\ \exists a\in A,\ a>b$(つまり, Aが上に有界でない)
$\Longrightarrow$ Aの上界は∞だけなので$\infty=\sup A$.
- $\exists b\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\leqq b$(つまり, Aが上に有界)のとき:
$\infty>b$なので, bがAの上界であるとの仮定より$\infty\notin A$. もし$A\cap\mathbb{R}=\phi$ならば, $A\neq\phi$, $\infty\notin A$と合わせて$A=\{-\infty\}$となるので$-\infty=\sup A$. そこで$A\cap\mathbb{R}\neq\phi$と仮定する. このとき$b\in\mathbb{R}$は$\mathbb{R}$の空でない部分集合$A\cap\mathbb{R}$の($\mathbb{R}$における)上界となるので$A\cap\mathbb{R}$の$\mathbb{R}$における上限$M:=\sup_{\mathbb{R}}(A\cap\mathbb{R})$が存在する. するとこのとき, $\infty\notin A$であったことを思い出すと$\forall a\in A$に対し, $a=-\infty\leqq M$か, もしくは$a\in\mathbb{R}$, 従って$a\in A\cap\mathbb{R}$なので$a\leqq\sup_{\mathbb{R}}(A\cap\mathbb{R})=M$, ゆえに$M$は$A$の$[-\infty,\infty]$における上界である. 最後に$c\in[-\infty,\infty]$を$A$の任意の($[-\infty,\infty]$における)上界とすると, $A\cap\mathbb{R}\neq\phi$より$x\in A\cap\mathbb{R}$を取ることができて$x\leqq c$となるので$c\neq-\infty$であり, よって$c=\infty\geqq M$となるか, または$c\in\mathbb{R}$かつ$\forall a\in A\cap\mathbb{R},\ a\leqq c$となるので$c$は$A\cap\mathbb{R}$の$\mathbb{R}$における上界であり$c\geqq\sup_{\mathbb{R}}(A\cap\mathbb{R})=M$. ゆえに$M=\sup A$. ■

命題1.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,\infty]$とする.

(1) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leqq a_{n+1}$ならば$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup_{n\geqq1}a_n$.

(2) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\geqq a_{n+1}$ならば$\lim_{n\to\infty}a_n=\inf_{n\geqq1}a_n$.

証明 (1) $M:=\sup_{n\geqq1}a_n$とおく. $M=-\infty$ならば$\forall n\in\mathbb{N}$, $-\infty\leqq a_n\leqq M=-\infty$より$a_n=-\infty\xrightarrow{n\to\infty}-\infty=M$. $M=\infty$ならば$\forall b\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ a_N>b$, 従って$\forall n\geqq N,\ a_n\geqq a_N>b$となるので$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty=M$. 最後に$M\in\mathbb{R}$ならば$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N},\ a_N>M-\varepsilon$, 従って$\forall n\geqq N,\ M\geqq a_n\geqq a_N>M-\varepsilon$となるので$\lim_{n\to\infty}a_n=M$. (2)も全く同様にして従う. ■

定義1.4($[-\infty,\infty]$における和と積)

各$a\in\mathbb{R}$に対し次のように定義することにより，$\mathbb{R}$における和と積を$[-\infty,\infty]$へと拡張する:

$$a+\infty:=\infty=:\infty+a,\quad \infty+\infty:=\infty,$$
$$a+(-\infty):=-\infty=:(-\infty)+a,\ (-\infty)+(-\infty):=-\infty,$$
$$\infty\cdot a:=a\cdot\infty:=\begin{cases}\infty & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -\infty & (a<0)\end{cases},\quad \infty\cdot\infty:=\infty,\ \infty\cdot(-\infty):=-\infty,$$
$$(-\infty)\cdot a:=a\cdot(-\infty):=\begin{cases}-\infty & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ \infty & (a<0)\end{cases},\quad (-\infty)\cdot\infty:=-\infty,\ (-\infty)\cdot(-\infty):=\infty.$$

さらに$-(\infty):=-\infty$, $-(-\infty):=\infty$, $|\infty|:=\infty$, $|-\infty|:=\infty$と定める.

注意1.5 「$\infty+(-\infty)$」と「$(-\infty)+\infty$」は定義されないことに注意!

定義1.4で「$0\cdot(\pm\infty):=0=:(\pm\infty)\cdot 0$」と定義したのは「定数関数0の，体積$\infty$の集合上での積分は0であるべき」という考えに基づくが，さらに次の命題により非負値関数の積分理論の記述が著しく簡素化されるという御理益がある.

記号 $\mathbb{R}$のときと同様に，$a,b\in[-\infty,\infty]$に対し

$(a,b):=\{x\in[-\infty,\infty]\mid a<x \text{ かつ } x<b\}$,

$[a,b):=\{x\in[-\infty,\infty]\mid a\leqq x \text{ かつ } x<b\}$,

$(a,b]:=\{x\in[-\infty,\infty]\mid a<x \text{ かつ } x\leqq b\}$,

$[a,b]:=\{x\in[-\infty,\infty]\mid a\leqq x \text{ かつ } x\leqq b\}$と定める.

命題1.6($[0,\infty]$における和と積の性質)

(0) $\forall a,b\in[0,\infty]$, $a+b,\ ab\in[0,\infty]$.

(1) $\forall a,b,c\in[0,\infty]$,

(i) $a+0=a=0+a$, $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$,

(ii) $a\cdot1=a=1\cdot a$, $ab=ba$, $(ab)c=a(bc)$,

(iii) $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty]$は$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqq a_{n+1}$かつ$b_n\leqq b_{n+1}$を満たすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right).$$

証明 (0) $\mathbb{R}$の性質と定義1.4より容易に従う.

(1) 全ての項が実数のときは主張の等式はいずれも自明であるので，少なくとも1つは∞が含まれる場合について各等式の成立を示せばよい. このとき(i)と(ii)の1つ目の4つは各辺∞となるので成り立つ. (ii)の残り2つは，0に等しい値が含まれていれば両辺とも0で等しく，そうでなければ両辺とも∞で等しいので成り立つ. (iii)の1つ目は，$a=0$もしくは$b+c=0(\Leftrightarrow b=c=0)$ならば両辺とも0で等しく，そうでなければやはり両辺とも∞で等しいので成り立つ. (iii)の2つ目も全く同じようにして示せるが，(ii)の2つ目と(iii)の1つ目を用いて$(a+b)c=c(a+b)=ca+cb=ac+bc$としても分かる.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n<\infty$かつ$\lim_{n\to\infty}b_n<\infty$のときは主張の等式は微分積分学においてよく知られた事実である. そこで$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$または$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$の場合に証明すればよい. 以下$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$と仮定して証明するが，$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$のときも全く同様.

まずa_n+b_nについては，$M\in\mathbb{R}$を任意に取ると$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$より$\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N$, $a_n>M$, 従って$\forall n\geqq N$, $a_n+b_n\geqq a_n>M$となるので$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$.

次にa_nb_nについては，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ならば命題1.3-(1)より$\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=0$なので$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)$となる. そこで$\lim_{n\to\infty}b_n>0$と仮定してよく，このとき$\exists\delta\in(0,\infty)$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N_1$, $b_n>\delta$. すると$M\in\mathbb{R}$を任意に取るとき，$\exists N_2\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N_2$, $a_n>M/\delta$が$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$より分かり，よって$\forall n\geqq\max\{N_1,N_2\}$, $a_nb_n>(M/\delta)\delta=M$となるので$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\infty=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)$. ■

注意1.7 命題1.6-(1)-(ii)は$\forall a,b,c\in[-\infty,\infty]$に対して成り立つことが定義1.4より容易に確認できる.

定義1.8 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty]$ に対し,（a_nを第n項とする無限級数の）和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を次で定義する:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\overset{}{\underset{\text{命題1.3-(1)}}{=\!=\!=}}\sup_{n\geq1}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

（$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}\geq0$ より $\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{k=1}^{n+1}a_k$ に注意）.

命題1.9 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty]$ とし, $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は全単射とする. このとき（$\sum_{n\in\emptyset}a_n:=0$ とおくと）

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sup_{\substack{A\subset\mathbb{N}\\ A\text{は有限}}}\sum_{n\in A}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}.$$

証明 主張の等式の左辺, 中辺, 右辺をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とおく. まず $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k\in\{1,\cdots,n\}}a_k\leq S_2$$

なので $n\in\mathbb{N}$ について上限を取って

$$S_1=\sup_{n\geq1}\sum_{k=1}^{n}a_k\leq S_2. \quad\cdots\cdots(1.1)$$

一方, $\mathbb{N}$の任意の有限部分集合Aに対し, $A=\emptyset$ のときは $n_A:=1$, $A\neq\emptyset$ のときは $n_A:=\max A$ と定めると, $n_A\in\mathbb{N}$ かつ $A\subset\{1,\cdots,n_A\}$ なので

$$\sum_{n\in A}a_n\leq\sum_{k=1}^{n_A}a_k\leq S_1$$

となり, そこでAについて上限を取って

$$S_2=\sup_{A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}}\sum_{n\in A}a_n\leq S_1. \quad\cdots\cdots(1.2)$$

(1.1)と(1.2)より $S_1=S_2$ が得られる.

次に $S_2=S_3$ については, 既に示した「$S_1=S_2$」を $\{a_{\varphi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ に対して用いた後でさらに

$$\{\varphi(A)\mid A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}\}=\{A\mid A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}\}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}S_3&=\sup_{A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}}\sum_{n\in A}a_{\varphi(n)}\\&=\sup_{A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}}\sum_{n\in\varphi(A)}a_n\\&=\sup_{A\subset\mathbb{N},\,A\text{は有限}}\sum_{n\in A}a_n=S_2\end{aligned}$$

となり, 分かる. ■

定義1.10（可算無限集合上の正項級数の和）Ωを可算無限集合とし, $\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset[0,\infty]$ とする. このとき（a_ωを項とするΩ上の無限級数の）和 $\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega$ を次で定義する: 任意の全単射 $\varphi:\mathbb{N}\to\Omega$ に対し

$$\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega:=\sup_{\substack{A\subset\Omega\\ A\text{は有限}}}\sum_{\omega\in A}a_\omega\overset{\text{命題1.9}}{=\!=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}.$$

記号 $a\in[-\infty,\infty]$ に対し

$$a^+:=\max\{a,0\},\quad a^-:=-\min\{a,0\}$$

とおく. 容易に分かるように,

$$a^+,a^-\in[0,\infty],\quad a=a^+-a^-,\quad |a|=a^++a^-\ \text{である.}$$

定理1.11 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$ を満たすとし, $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は全単射とする. このとき極限値

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}z_k\in\mathbb{C},\quad\sum_{n=1}^{\infty}z_{\varphi(n)}:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}z_{\varphi(k)}\in\mathbb{C}$$

がともに存在し, かつ $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}z_{\varphi(n)}$.

証明 各$n\in\mathbb{N}$に対し $z_n=x_n+iy_n$ ($x_n,y_n\in\mathbb{R}$) とおき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ を4つの数列 $\{x_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ のうちの任意の1つとする. このとき $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq a_n\leq|z_n|$ なので

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|\leq\sum_{l=1}^{\infty}|z_l|<\infty$$

であり, よって$n\in\mathbb{N}$について上限を取って

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{l=1}^{\infty}|z_l|<\infty,$$

特に $\{\sum_{k=1}^{n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は$\mathbb{R}$において $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に収束する. 命題1.9より $\sum_{n=1}^{\infty}|z_{\varphi(n)}|=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$ であることに注意して $\{z_{\varphi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ に対し今示した事実を適用すると, $\{\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ も$\mathbb{R}$において $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}\overset{\text{命題1.9}}{=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に収束する. よって2つの複素数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}z_k=\sum_{k=1}^{n}x_k^+-\sum_{k=1}^{n}x_k^-+i\sum_{k=1}^{n}y_k^+-i\sum_{k=1}^{n}y_k^-\right\}_{n=1}^{\infty}$$

および

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}z_{\varphi(k)}=\sum_{k=1}^{n}x_{\varphi(k)}^+-\sum_{k=1}^{n}x_{\varphi(k)}^-+i\sum_{k=1}^{n}y_{\varphi(k)}^+-i\sum_{k=1}^{n}y_{\varphi(k)}^-\right\}_{n=1}^{\infty}$$

はともに$\mathbb{C}$において $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-+i\sum_{n=1}^{\infty}y_n^+-i\sum_{n=1}^{\infty}y_n^-$ に収束する. ■

定義1.12（可算無限集合上の絶対収束級数の和）Ωを可算無限集合とし, $\{z_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset\mathbb{C}$ は $\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|<\infty$ を満たすとする. このとき（z_ωを項とするΩ上の無限級数の）和 $\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega$ を次で定義する: 全単射 $\varphi:\mathbb{N}\to\Omega$ を任意に1つ取り,

$$\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega:=\sum_{n=1}^{\infty}z_{\varphi(n)}$$

（命題1.9と定理1.11により右辺の無限級数は$\mathbb{C}$においてφに依存しない一定値に収束する）

次に，2つの添字を持つ数列が定める無限級数の和の順序交換可能性を保証する定理を述べる．この定理は測度論の文脈で同様の主張を与えるFubiniの定理の「離散版」である．

定理1.13（離散Fubiniの定理）
Ω_1, Ω_2を可算集合とする．

(1) $\{a_{x,y}\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}\subset[0,\infty]$とする．このとき

$$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}=\sum_{x\in\Omega_1}\Bigl(\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}\Bigr)=\sum_{y\in\Omega_2}\Bigl(\sum_{x\in\Omega_1} a_{x,y}\Bigr). \quad\cdots\cdots(1.3)$$

(2) $\{z_{x,y}\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}\subset\mathbb{C}$とし，

$$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}|z_{x,y}|,\ \sum_{x\in\Omega_1}\Bigl(\sum_{y\in\Omega_2}|z_{x,y}|\Bigr),\ \sum_{y\in\Omega_2}\Bigl(\sum_{x\in\Omega_1}|z_{x,y}|\Bigr)$$

のうち少なくとも1つ（従って(1)により3つとも）が有限（すなわち，∞でない）と仮定する．このとき

- $\forall x\in\Omega_1,\ \sum_{y\in\Omega_2}|z_{x,y}|<\infty$,
- $\sum_{x\in\Omega_1}\left|\sum_{y\in\Omega_2} z_{x,y}\right|<\infty$,
- $\forall y\in\Omega_2,\ \sum_{x\in\Omega_1}|z_{x,y}|<\infty$,
- $\sum_{y\in\Omega_2}\left|\sum_{x\in\Omega_1} z_{x,y}\right|<\infty$, かつ

$$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} z_{x,y}=\sum_{x\in\Omega_1}\Bigl(\sum_{y\in\Omega_2} z_{x,y}\Bigr)=\sum_{y\in\Omega_2}\Bigl(\sum_{x\in\Omega_1} z_{x,y}\Bigr). \quad\cdots\cdots(1.4)$$

証明 (1) Ω_1の有限部分集合A_1とΩ_2の有限部分集合A_2を任意に取ると，

$$\sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} a_{x,y}=\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2} a_{x,y}\le\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y} \quad\cdots\cdots(1.5)$$
$$\le\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}.$$

そこで$\Omega_1\times\Omega_2$の任意の有限部分集合Aに対し，

$A^1:=\{x\in\Omega_1\mid\exists y\in\Omega_2,(x,y)\in A\}\subset\Omega_1$,
$A^2:=\{y\in\Omega_2\mid\exists x\in\Omega_1,(x,y)\in A\}\subset\Omega_2$

とおくとAは有限なのでA^1, A^2も有限であり，またA^1, A^2の定義により$A\subset A^1\times A^2$であるので

$$\sum_{(x,y)\in A} a_{x,y}\le\sum_{(x,y)\in A^1\times A^2} a_{x,y}\overset{(1.5)}{\le}\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}.$$

よってAについて上限を取って$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}\le\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}$を得る．

逆向きの不等式を示すために，Ω_1の有限部分集合A_1を任意に取る．次が成り立つことを示そう：

$$\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}\le\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}. \quad\cdots\cdots(1.6)$$

Ω_2が有限ならば(1.6)は右辺の和の定義より直ちに従うので，Ω_2は可算無限と仮定して示せばよい．さらに(1.6)は右辺が∞のときは明らかに成り立つので，(1.6)の右辺は有限と仮定して示せばよい．全単射$\varphi:\mathbb{N}\to\Omega_2$を1つ取る．$\forall x_0\in\Omega_1, \forall n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n a_{x_0,\varphi(k)}\le\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}<\infty$$

なので$n\in\mathbb{N}$について上限を取ることで

$$\sum_{y\in\Omega_2} a_{x_0,y}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_{x_0,\varphi(k)}\in[0,\infty) \quad(1.7)$$

が分かる．ここで$\forall n\in\mathbb{N}$に対し(1.6)の右辺の和の定義より$\sum_{x\in A_1}\sum_{k=1}^n a_{x,\varphi(k)}\le\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}$であり，この左辺は(1.7)より$n\to\infty$のとき(1.6)の左辺に収束するので，(1.6)が得られる．

あとは(1.6)の左辺のA_1についての上限を取れば

$$\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} a_{x,y}\le\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}$$

が得られ，逆向きの不等式と合わせて(1.3)の1つ目の等号が示せた．(1.3)の残る右辺が$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} a_{x,y}$に等しいことも全く同様にして分かる．

(2) まず，定義1.12の状況で次が成り立つことに注意する：

$$\boxed{\left|\sum_{\omega\in\Omega} z_\omega\right|\le\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|.} \quad\cdots\cdots(1.8)$$

（実際，絶対値$|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$の連続性により（左辺）$=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n z_{\varphi(k)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^n z_{\varphi(k)}\right|$（三角不等式）$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n|z_{\varphi(k)}|=$（右辺）となり，分かる．）

さて，最初の4つの主張については，1つ目は$\forall x_0\in\Omega_1$,

$$\sum_{y\in\Omega_2}|z_{x_0,y}|\le\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}|z_{x,y}|<\infty$$

より分かり，2つ目は(1.8)により

$$\sum_{x\in\Omega_1}\left|\sum_{y\in\Omega_2} z_{x,y}\right|\le\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}|z_{x,y}|<\infty$$

となることから分かる．3つ目と4つ目の主張も全く同様にして得られる．

(1.4)を示すために，定理1.11の証明と同じように，各$(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2$に対し$z_{x,y}=u_{x,y}+iv_{x,y}$ $(u_{x,y}, v_{x,y}\in\mathbb{R})$とおき，$\{a_{x,y}\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$を$\{u_{x,y}^+\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$, $\{u_{x,y}^-\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$, $\{v_{x,y}^+\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$,

$\{v_{x,y}^{-}\}_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$ のうちの任意の1つとする．このとき $\forall(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2$, $0\leqq a_{x,y}\leqq|z_{x,y}|$ なので

$$((1.3)\text{の各辺})=\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}a_{x,y}\leqq\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}|z_{x,y}|<\infty.$$

そこであとは

$$\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}z_{x,y}=\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}u_{x,y}^{+}-\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}u_{x,y}^{-}+i\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}v_{x,y}^{+}-i\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}v_{x,y}^{-}$$

の右辺の各項に(1.3)を適用して $\sum_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2}$ を $\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}$ もしくは $\sum_{y\in\Omega_2}\sum_{x\in\Omega_1}$ に置き換えた後，4つの（収束する無限級数の）和を1つにまとめ直すことで(1.4)が得られる． ■

定理1.13の応用として，正項級数および絶対収束級数に対しては「先に各部分集合ごとに和を計算してからその総和を取る」という和の取り方の分割を行っても最終的な和の値は変わらないことを示す．そのために次の記号と補題が必要である．

記号 集合 Ω と $A\subset\Omega$ に対し，$\mathbb{1}_A^{\Omega}:\Omega\to\mathbb{R}$ を

$$\mathbb{1}_A^{\Omega}(\omega):=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\in\Omega\setminus A)\end{cases}$$

で定める．全体集合 Ω が何であるかが文脈から明らかである場合には添字の Ω を省略して $\mathbb{1}_A^{\Omega}$ を単に $\mathbb{1}_A$ と表記する．

補題1.14 Ω を可算集合とし，$A\subset\Omega$ とする．

(1) $\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset[0,\infty]$ とする．このとき

$$\sum_{\omega\in A}a_\omega=\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega\mathbb{1}_A(\omega).$$

(2) $\{z_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset\mathbb{C}$ とし，$\sum_{\omega\in A}|z_\omega|$, $\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|\mathbb{1}_A(\omega)$ のうち少なくとも1つ（従って(1)により2つとも）が有限と仮定する．このとき $\sum_{\omega\in A}z_\omega=\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega\mathbb{1}_A(\omega)$.

証明

(1)
$$\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega\mathbb{1}_A(\omega)=\sup_{\substack{B\subset\Omega\\ B\text{は有限}}}\sum_{\omega\in B}a_\omega\mathbb{1}_A(\omega)=\sup_{\substack{B\subset\Omega\\ B\text{は有限}}}\sum_{\omega\in B\cap A}a_\omega=\sup_{\substack{B\subset A\\ B\text{は有限}}}\sum_{\omega\in B}a_\omega=\sum_{\omega\in A}a_\omega.$$

$(\{B\cap A\mid B\subset\Omega, B\text{は有限}\}=\{B\mid B\subset A, B\text{は有限}\})$

(2) 各 $\omega\in\Omega$ に対し $z_\omega=x_\omega+iy_\omega$ $(x_\omega,y_\omega\in\mathbb{R})$ とおき，$\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ を $\{x_\omega^{+}\}_{\omega\in\Omega}$, $\{x_\omega^{-}\}_{\omega\in\Omega}$, $\{y_\omega^{+}\}_{\omega\in\Omega}$, $\{y_\omega^{-}\}_{\omega\in\Omega}$ のうちの任意の1つとする．このとき $\forall\omega\in\Omega$, $0\leqq a_\omega\leqq|z_\omega|$ なので $\sum_{\omega\in A}a_\omega\leqq\sum_{\omega\in A}|z_\omega|<\infty$ であり，これと(1)より

$$\sum_{\omega\in A}z_\omega=\sum_{\omega\in A}x_\omega^{+}-\sum_{\omega\in A}x_\omega^{-}+i\sum_{\omega\in A}y_\omega^{+}-i\sum_{\omega\in A}y_\omega^{-}$$

$$\overset{(1)}{=}\sum_{\omega\in\Omega}x_\omega^{+}\mathbb{1}_A(\omega)-\sum_{\omega\in\Omega}x_\omega^{-}\mathbb{1}_A(\omega)+i\sum_{\omega\in\Omega}y_\omega^{+}\mathbb{1}_A(\omega)-i\sum_{\omega\in\Omega}y_\omega^{-}\mathbb{1}_A(\omega)$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega\mathbb{1}_A(\omega).$$ ■

定理1.15 Ω を可算集合とし，$\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset2^{\Omega}$ を Ω の<u>分割</u>，すなわち Λ は可算集合，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda=\Omega$ かつ $\forall\lambda\in\Lambda$, $\forall\lambda'\in\Lambda\setminus\{\lambda\}$, $\Omega_\lambda\cap\Omega_{\lambda'}=\emptyset$ を満たすものとする．

(1) $\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset[0,\infty]$ とする．このとき

$$\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}a_\omega.$$

(2) $\{z_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset\mathbb{C}$ とし，$\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|$, $\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}|z_\omega|$ のうち少なくとも1つ（従って(1)により2つとも）が有限と仮定する．このとき

- $\forall\lambda\in\Lambda$, $\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}|z_\omega|<\infty$,
- $\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}z_\omega\right|<\infty$, かつ
$$\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}z_\omega.$$

証明

各 $\omega\in\Omega$ に対し，$\omega\in\Omega_\lambda$ となる $\lambda\in\Lambda$ が唯1つ存在することに注意する．

(1)
$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}a_\omega\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=}\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)\overset{\text{定理1.13-(1)}}{=}\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}a_\omega.$$

(2) 仮定と補題1.14-(1)により

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}|z_\omega|<\infty$$

であるので $\{z_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)\}_{(\omega,\lambda)\in\Omega\times\Lambda}\subset\mathbb{C}$ に対し定理1.13-(2)が適用でき，まず

$$\forall\lambda\in\Lambda,\ \sum_{\omega\in\Omega_\lambda}|z_\omega|\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=}\sum_{\omega\in\Omega}|z_\omega|\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)<\infty$$

および

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}z_\omega\right|\overset{\text{補題1.14-(2)}}{=}\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)\right|<\infty$$

が得られる．さらに(1.4)により

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega_\lambda}z_\omega=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)\overset{(1.4)}{=}\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{\lambda\in\Lambda}z_\omega\mathbb{1}_{\Omega_\lambda}(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}z_\omega$$

となり，主張の等式も得られる． ■

§2. 離散型確率空間

まず本§では可算集合上の測度(離散型測度)の概念を導入し，それが各点における測度の値を与える関数と自然に同一視できることを示す．特に全体集合の測度の値が1であるような測度を(離散型)確率測度という：

定義2.1(離散型(確率)測度)
Ωを可算集合とし，$\mu: 2^\Omega \longrightarrow [0,\infty]$とする．
μがΩ上の離散型測度
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\mu(\emptyset)=0$.
(ii) $\forall j\in\mathbb{N}, \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{j\}, A_j\cap A_k=\emptyset$を満たす任意の$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset 2^\Omega$に対し
$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ (可算加法性)
このとき組(Ω,μ)を離散型測度空間といい，さらに$\mu(\Omega)=1$が成り立つときμをΩ上の離散型確率測度，組(Ω,μ)を離散型確率空間という．

補題2.2 (Ω,μ)を離散型測度空間とする．
$n\in\mathbb{N}$とし，$\{A_j\}_{j=1}^n\subset 2^\Omega$は$\forall j\in\{1,\dots,n\}$, $\forall k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}$, $A_j\cap A_k=\emptyset$を満たすとする．
このとき　$\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j)=\sum_{j=1}^n\mu(A_j)$.

証明 各$j\in\mathbb{N}\setminus\{1,\dots,n\}$に対し$A_j:=\emptyset$とおくと，$\{A_j\}_{j=1}^\infty\subset 2^\Omega$は$\forall j\in\mathbb{N}, \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{j\}, A_j\cap A_k=\emptyset$を満たすので$\mu$の可算加法性と$\mu(\emptyset)=0$(定義2.1)により
$$\mu(\textstyle\bigcup_{j=1}^n A_j)=\mu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j)\overset{\text{可算加法性}}{=}\sum_{j=1}^\infty\mu(A_j)\overset{\mu(\emptyset)=0}{=}\sum_{j=1}^n\mu(A_j).$$ ■

定理2.3 Ωを可算集合とする．
(1) $\varphi:\Omega\longrightarrow[0,\infty]$とし，$\mu_\varphi: 2^\Omega\longrightarrow[0,\infty]$を
$$\mu_\varphi(A):=\sum_{\omega\in A}\varphi(\omega) \quad \text{------ (2.1)}$$
で定める．このときμ_φはΩ上の離散型測度である．
(2) 写像 $[0,\infty]^\Omega\longrightarrow\{\mu\mid\mu\text{は}\Omega\text{上の離散型測度}\}$
$\varphi\longmapsto\mu_\varphi$
は全単射である．

証明 (1) まず$\mu_\varphi(\emptyset)=\sum_{\omega\in\emptyset}\varphi(\omega)=0$である．
次に$\forall j\in\mathbb{N}, \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{j\}, A_j\cap A_k=\emptyset$を満たす$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset 2^\Omega$を任意に取る．このとき$\{A_n\}_{n=1}^\infty$は$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$の分割であるので定理1.15-(1)により
$$\mu_\varphi(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{\omega\in\bigcup_{n=1}^\infty A_n}\varphi(\omega)\overset{\text{定理1.15(1)}}{=}\sum_{n=1}^\infty\sum_{\omega\in A_n}\varphi(\omega)=\sum_{n=1}^\infty\mu_\varphi(A_n).$$
以上により，μ_φはΩ上の離散型測度である．
(2) Ω上の離散型測度μに対し，$\varphi_\mu:\Omega\to[0,\infty]$を$\varphi_\mu(\omega):=\mu(\{\omega\})$で定めると，各$A\subset\Omega$に対し$\mu$の可算加法性(定義2.1-(ii))と補題2.2により
$$\mu_{\varphi_\mu}(A)\overset{(2.1)}{=}\sum_{\omega\in A}\varphi_\mu(\omega)=\sum_{\omega\in A}\mu(\{\omega\})\overset{\text{可算加法性 補題2.2}}{=}\mu(\textstyle\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\})=\mu(A)$$
となり，従って$\mu_{\varphi_\mu}=\mu$. 他方任意の$\varphi:\Omega\to[0,\infty]$に対し，$\forall\omega\in\Omega$, $\varphi_{\mu_\varphi}(\omega)=\mu_\varphi(\{\omega\})\overset{(2.1)}{=}\sum_{\tau\in\{\omega\}}\varphi(\tau)=\varphi(\omega)$
となるので，$\varphi_{\mu_\varphi}=\varphi$. 以上により，$\varphi\longmapsto\mu_\varphi$と$\mu\longmapsto\varphi_\mu$は$[0,\infty]^\Omega$と$\{\mu\mid\mu\text{は}\Omega\text{上の離散型測度}\}$の間の互いに逆の全単射である． ■

注意2.4 定理2.3(とその証明)により，可算集合Ω上の離散型測度μは$\varphi_\mu(\omega):=\mu(\{\omega\})$で与えられる$\Omega$上の$[0,\infty]$-値関数$\varphi_\mu:\Omega\to[0,\infty]$と(2.1)を通して同一視でき，特に$\varphi:\Omega\to[0,\infty]$を与えることは(2.1)で定義される$\Omega$上の離散型測度$\mu_\varphi$を与えることと同等である．そこで以後，離散型測度を定める際には対応する$[0,\infty]$-値関数φを与えることにし，φから(2.1)により定まるμ_φが実際に考えられている離散型測度であることを一々断らない．

例2.5 Ωを可算集合とする．
(1) $\forall\omega\in\Omega$, $\mu(\{\omega\}):=1$ (すなわち$\forall A\subset\Omega, \mu(A):=\#A$)で定義される$\Omega$上の離散型測度$\mu$を，$\Omega$上の数え上げ測度(counting measure)という．
(2) $\omega_0\in\Omega$とする．$\forall\omega\in\Omega$, $\delta_{\omega_0}(\{\omega\}):=\begin{cases}1 & (\omega=\omega_0)\\ 0 & (\omega\neq\omega_0)\end{cases}$
(すなわち$\forall A\subset\Omega$, $\delta_{\omega_0}(A):=\mathbb{1}_A(\omega_0)$)で定義される$\Omega$上の離散型確率測度$\delta_{\omega_0}$を，($\Omega$上の)$\omega_0$におけるDiracのデルタ測度という．

$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathbb{P}) \arrow[r, "X"] \arrow[drr, "f(X)"'] & X(\Omega)\ \mathbb{P}\circ X^{-1} \arrow[r, hook] & S \arrow[d, "f"] \\
 & & {[0,\infty]}(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{E}[f(X)]$ ＝ $E_X[f]$ 定理3.6

§3. 確率変数とその分布, 期待値

本§を通して, $(\Omega,\mathbb{P})$ を離散型確率空間とする.

定義3.1 (1) Ω を $(\Omega,\mathbb{P})$ の<u>標本空間</u>という.
(2) 各 $A\subset\Omega$ を<u>事象</u>といい, $\mathbb{P}[A]$ をその<u>確率</u>という.

定義3.2 (確率変数とその分布) S を集合とする.
(1) 写像 $X:\Omega\to S$ のことを<u>S-値確率変数</u>(S-valued random variable, S-値r.v.)といい, $S=\mathbb{R}$ のとき<u>実確率変数</u>(real r.v.), $S=\mathbb{C}$ のとき<u>複素確率変数</u>(complex r.v.), $S=\mathbb{R}^d$ $(d\in\mathbb{N})$ のとき<u>d次元確率変数</u>(d-dimensional r.v., d-dim. r.v.)という.
(2) Ω が可算なので X の像 $X(\Omega)$ も可算集合であることに注意し, $X(\Omega)$ 上の離散型測度 $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ を次で定める:

$$\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\}):=\mathbb{P}[X=a]=\mathbb{P}[X^{-1}(a)]. \quad (3.1)$$

(ただし $\{X\in a\}:=\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=a\}=X^{-1}(a)$ とおき, $\mathbb{P}[\{X=a\}]$ を $\mathbb{P}[X=a]$ と略記している; 以後, 確率変数を用いて記述される事象に対し同様の記法を用いる.)

$$\sum_{a\in X(\Omega)}\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})=\sum_{a\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X^{-1}(a)] \overset{\substack{\text{可算加法性?}\\ \text{補題2.2}}}{=} \mathbb{P}\Big[\bigcup_{a\in X(\Omega)}X^{-1}(a)\Big]=\mathbb{P}[\Omega]=1$$

であるので, $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ は $X(\Omega)$ 上の離散型確率測度でありこれを X の<u>分布</u>(distribution)もしくは<u>法則</u>(law)という.

注意3.3 定義3.2-(2)において, $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ の定義域(を規定する集合)として $X(\Omega)$ の代わりに $X(\Omega)\subset S_X$ を満たす任意の可算集合 S_X を取ることができ, このとき(3.1)により定義される $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ は S_X 上の離散型確率測度で $\mathbb{P}\circ X^{-1}(S_X\setminus X(\Omega))=0$ を満たす. 以後, $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ を通常は $X(\Omega)$ 上の離散型確率測度として取り扱うが, 必要に応じて $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ をより大きな可算集合上の離散型確率測度ともみなすものとする.

実は確率論においては元の確率空間 $(\Omega,\mathbb{P})$ の取り方は重要ではなく(問題の現象を記述し切れる程度に十分大きく取りさえすればよく), 重要なのは現象の記述に用いる確率変数の分布である. このことは分布と期待値(平均)の関係を述べた下記の定理3.6に見て取れるが, まず期待値(平均)を定義しよう:

定義3.4 (期待値(平均)) X を $[0,\infty]$-値r.v.かもしくは $\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|\mathbb{P}[\{\omega\}]<\infty$ を満たすcomplex r.v.とする. このとき X の<u>期待値(平均)$\mathbb{E}[X]$</u> を次で定める:

$$\mathbb{E}[X]:=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}[\{\omega\}].$$

命題3.5 (1) X,Y を $[0,\infty]$-値r.v.とし $\alpha,\beta\in[0,\infty]$ とするとき

$$\mathbb{E}[\alpha X+\beta Y]=\alpha\mathbb{E}[X]+\beta\mathbb{E}[Y]. \quad (3.2)$$

(2) X,Y はcomplex r.v.で $\mathbb{E}[|X|]<\infty$, $\mathbb{E}[|Y|]<\infty$ を満たすとし, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ とする. このとき $\mathbb{E}[|\alpha X+\beta Y|]<\infty$ であり, さらに(3.2)が成り立つ.

証明 (1) 命題1.6-(2)より直ちに従う.
(2) まず $|\alpha X+\beta Y|\leq|\alpha||X|+|\beta||Y|$ と(1)により

$$\mathbb{E}[|\alpha X+\beta Y|]\leq\mathbb{E}[|\alpha||X|+|\beta||Y|] \overset{(1)}{=} |\alpha|\mathbb{E}[|X|]+|\beta|\mathbb{E}[|Y|]<\infty.$$

(3.2)は $\mathbb{C}$ における極限が命題1.6-(2)の結論と同様の性質を満たすことから直ちに従う. ■

定理3.6 (像測度定理) S を集合, X を S-値r.v.とし, $X(\Omega)$ 上での $\mathbb{P}\circ X^{-1}$ に関する期待値を $\mathbb{E}_X[\cdot]$ とする.
(1) $f:S\to[0,\infty]$ とする. このとき(ページ上の図も参照)

$$\mathbb{E}[f(X)]=\mathbb{E}_X[f]. \quad (3.3)$$

(2) $f:S\to\mathbb{C}$ とし, $\mathbb{E}[|f(X)|]$, $\mathbb{E}_X[|f|]$ のうち少なくとも1つ(従って(1)により2つとも)が有限と仮定する. このとき(3.3)が成り立つ.

証明 $\{X^{-1}(a)\}_{a\in X(\Omega)}\subset 2^{\Omega}$ が Ω の分割であることに注意する.
(1) 定理1.15-(1)と(3.1)により

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)]&=\sum_{\omega\in\Omega}f(X(\omega))\mathbb{P}[\{\omega\}]\\
&\overset{\text{定理1.15}}{=}\sum_{a\in X(\Omega)}\sum_{\omega\in X^{-1}(a)}f(a)\mathbb{P}[\{\omega\}] \quad (3.4)\\
&\overset{(3.1)}{=}\sum_{a\in X(\Omega)}f(a)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})=\mathbb{E}_X[f].
\end{aligned}$$

(2) $\mathbb{E}[|f(X)|]<\infty$ と定理1.15-(2)により, (3.4)中の和は全て絶対収束しており(各項の絶対値の和が有限であり), かつ(3.4)がそのまま成立するので(3.3)が得られる. ■

次に実確率変数の分散の定義に関連して、べき乗の期待値(モーメント)の有限性についての基本的な事実を述べる。

<u>定義3.7</u> $p\in(0,\infty)$に対し、$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{P})\subset\mathbb{R}^\Omega$を
$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{P}):=\mathcal{L}^p(\mathbb{P}):=\{X\mid X:\Omega\to\mathbb{R},\ \mathbb{E}[|X|^p]<\infty\}$
で定める。

<u>命題3.8</u> $p\in(0,\infty)$とし、$X,Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$とする。このとき$\alpha X+\beta Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$.

<u>証明</u>
$$\begin{aligned}|\alpha X+\beta Y|^p &\leqq(|\alpha X|+|\beta Y|)^p\\ &\leqq(2\max\{|\alpha X|,|\beta Y|\})^p\\ &=2^p\max\{|\alpha|^p|X|^p,|\beta|^p|Y|^p\}\\ &\leqq 2^p(|\alpha|^p|X|^p+|\beta|^p|Y|^p)\end{aligned}$$
であるので命題3.5-(1)により
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\alpha X+\beta Y|^p]&\leqq\mathbb{E}[2^p(|\alpha|^p|X|^p+|\beta|^p|Y|^p)]\\ &\overset{\text{命題3.5-(1)}}{=}2^p(|\alpha|^p\mathbb{E}[|X|^p]+|\beta|^p\mathbb{E}[|Y|^p])\\ &<\infty\end{aligned}$$
となり、よって$\alpha X+\beta Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$. ■

<u>命題3.9</u> (1) Xをreal r.v.とし、Xは<u>$\mathbb{P}$-a.s.に有界</u>、すなわち$^\exists M\in[0,\infty)$, $\mathbb{P}[\{\omega\}]>0$を満たす任意の$\omega\in\Omega$に対し$|X(\omega)|\leqq M$を満たすとする。このとき
$$X\in\bigcap\nolimits_{p\in(0,\infty)}\mathcal{L}^p(\mathbb{P}).$$
(2) $X,Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Rightarrow XY\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $|\mathbb{E}[XY]|^2\leqq\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]$ (Cauchy-Schwarzの不等式). 特に、
$$X\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Rightarrow X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P}),\ |\mathbb{E}[X]|^2\leqq\mathbb{E}[X^2].$$

<u>証明</u> (1) $p\in(0,\infty)$とする。このときXに対する仮定により$^\forall\omega\in\Omega$, $|X(\omega)|^p\mathbb{P}[\{\omega\}]\leqq M^p\mathbb{P}[\{\omega\}]$であるので
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X|^p]&=\textstyle\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|^p\mathbb{P}[\{\omega\}]\\ &\leqq\textstyle\sum_{\omega\in\Omega}M^p\mathbb{P}[\{\omega\}]=M^p\mathbb{P}[\Omega]=M^p<\infty,\end{aligned}$$
よって$X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$. $p\in(0,\infty)$は任意なので主張が従う。
(2) $X,Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$とする。$|XY|\leqq\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$なので
$$\underset{<\infty,}{\mathbb{E}[|XY|]}\leqq\mathbb{E}\left[\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2)\right]\overset{}{\underset{\text{命題3.5-(1)}}{=}}\frac{\mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[Y^2]}{2}\quad(3.4)$$
よって$XY\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. また、$\mathbb{E}[X^2]=0=\mathbb{E}[Y^2]$ならば(3.4)により$0\leqq\mathbb{E}[|XY|]\leqq\frac{0+0}{2}=0$, 従って
$$|\mathbb{E}[XY]|^2\overset{(1.8)}{\leqq}\mathbb{E}[|XY|]^2=0=\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]$$
となり主張は成り立つので、$\mathbb{E}[X^2]>0$または$\mathbb{E}[Y^2]>0$と仮定して示せばよい。$\mathbb{E}[X^2]>0$のとき、$t:=-\frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[X^2]}$とおくと$t\in\mathbb{R}$であり命題3.5-(2)により
$$\begin{aligned}0\leqq\mathbb{E}[(tX+Y)^2]&=\mathbb{E}[t^2X^2+2tXY+Y^2]\\ &\overset{\text{命題3.5-(2)}}{=}t^2\mathbb{E}[X^2]+2t\mathbb{E}[XY]+\mathbb{E}[Y^2]\\ &=\frac{1}{\mathbb{E}[X^2]}(-|\mathbb{E}[XY]|^2+\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2])\end{aligned}$$
となるので、$|\mathbb{E}[XY]|^2\leqq\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]$. $\mathbb{E}[Y^2]>0$のときも全く同様にして示せ、「特に」以降の主張は$Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$として$Y=\mathbb{1}_\Omega$を取ることで得られる。■

<u>定義3.10</u> (分散, 共分散)
(1) Real r.v. Xに対し、$X\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ならば命題3.9-(2)により$\mathbb{E}[X]\in\mathbb{R}$が定まることに注意し、$X$の<u>分散</u>$var(X)$を
$$var(X):=\begin{cases}\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]\underset{\text{命題3.5-(2)}}{=}\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 & (X\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P}))\\ \infty & (X\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P}))\end{cases}$$
で定める。(また$\sigma(X):=\sqrt{var(X)}$ ($\sqrt{\infty}:=\infty$)をXの<u>標準偏差</u>という。)
(2) $X,Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$に対し、命題3.9-(2)により$XY\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$かつ$(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$であることに注意し、$X,Y$の<u>共分散</u> $cov(X,Y)$を次で定める:
$$cov(X,Y):=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]\overset{\text{命題3.5-(2)}}{=}\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

<u>系3.11</u> Xをreal r.v.とする。
(1) $\mathbb{E}[|X|]=\sum_{a\in X(\Omega)}|a|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})$. さらに$\mathbb{E}[|X|]<\infty$ならば
$$\mathbb{E}[X]=\textstyle\sum_{a\in X(\Omega)}a\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\}).$$
(2) $\mathbb{E}[X^2]=\sum_{a\in X(\Omega)}a^2\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})$.

<u>証明</u> $S=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$として定理3.6を適用する。
(1) 前半は定理3.6-(1)を$f(x)=|x|$として、後半は定理3.6-(2)を$f(x)=x$として用いることで得られる。
(2) 定理3.6-(1)を$f(x)=x^2$として用いればよい。■

系3.11より特に、Xの期待値(平均)$\mathbb{E}[X]$, 分散$var(X)$は($\mathbb{E}[X]$が存在するかどうかも含めて)<u>Xの分布$\mathbb{P}\circ X^{-1}$のみに依存して決まり</u>離散型確率空間$(\Omega,\mathbb{P})$の詳細には依存しない。

次の不等式は，証明は容易だが応用上極めて重要である．$p\in(0,\infty)$ に対し $\infty^p:=\infty$ と定める．

命題3.12（Chebyshev（チェビシェフ）の不等式）
X を $[0,\infty]$-値r.v.とし，$\varphi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ は単調非減少とする．このとき $\varphi(a)\in(0,\infty)$ を満たす任意の $a\in[0,\infty]$ に対し

$$\mathbb{P}[X\geq a]\leq\frac{1}{\varphi(a)}\mathbb{E}[\varphi(X)]. \quad (3.5)$$

特に $\forall p\in(0,\infty)$, $\forall a\in(0,\infty)$,

$$\mathbb{P}[X\geq a]\leq\frac{1}{a^p}\mathbb{E}[X^p]. \quad (3.6)$$

証明

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X)]&=\sum_{\omega\in\Omega}\varphi(X(\omega))\mathbb{P}[\{\omega\}]\\ &\overset{\varphi\geq0,\ \mathbb{P}\geq0}{\geq}\sum_{\omega\in\{X\geq a\}}\varphi(X(\omega))\mathbb{P}[\{\omega\}]\\ &\overset{\varphi:\text{単調非減少}}{\geq}\sum_{\omega\in\{X\geq a\}}\varphi(a)\mathbb{P}[\{\omega\}]\\ &=\varphi(a)\sum_{\omega\in\{X\geq a\}}\mathbb{P}[\{\omega\}]\\ &=\varphi(a)\mathbb{P}[X\geq a]\end{aligned}$$

であるので，この不等式の各辺に $\frac{1}{\varphi(a)}\in(0,\infty)$ を掛けることで(3.5)が得られ，(3.5)で $\varphi(s)=s^p$ と取れば(3.6)が得られる．■

後の便宜のため，事象の下での条件付確率測度の定義をここで与えておく．

定義3.13（（確率が正の）事象の下での条件付確率測度）
$B\subset\Omega$ は $\mathbb{P}[B]>0$ を満たすとする．このとき $A\subset\Omega$ に対し $\mathbb{P}[A\,|\,B]\in[0,1]$ を

$$\mathbb{P}[A\,|\,B]:=\frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]} \quad (3.7)$$

で定義し，これを（$(\Omega,\mathbb{P})$ における）A の B の下での条件付確率，また $\mathbb{P}[\,\cdot\,|\,B]:2^{\Omega}\to[0,1]$ を（$(\Omega,\mathbb{P})$ における）B の下での条件付確率測度という．

命題3.14 $B\subset\Omega$ は $\mathbb{P}[B]>0$ を満たすとする．
(1) $\mathbb{P}[\,\cdot\,|\,B]$ は Ω 上の離散型確率測度である．
(2) Ω 上での $\mathbb{P}[\,\cdot\,|\,B]$ に関する期待値を $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\,B]$ とする．
(i) $[0,\infty]$-値r.v. X に対し

$$\mathbb{E}[X\,|\,B]=\frac{1}{\mathbb{P}[B]}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]. \quad (3.8)$$

(ii) $\mathbb{E}[|X|\,|\,B]$, $\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_B]$ のうち少なくとも1つ（従って(i)により2つとも）が有限であるようなcomplex r.v.に対し(3.8)が成立つ．

証明 (1) $\mathbb{P}[\emptyset\,|\,B]=\frac{\mathbb{P}[\emptyset]}{\mathbb{P}[B]}=0$, $\mathbb{P}[\Omega\,|\,B]=\frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]}=1$ であり，また $\forall j\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{j\}$, $A_j\cap A_k=\emptyset$ を満たす任意の $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset2^{\Omega}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\,\middle|\,B\right]&=\mathbb{P}[B]^{-1}\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\right]\\ &\overset{\mathbb{P}\text{の可算加法性}}{=}\mathbb{P}[B]^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n\cap B]\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{P}[A_n\cap B]}{\mathbb{P}[B]}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n\,|\,B].\end{aligned}$$

以上より，$\mathbb{P}[\,\cdot\,|\,B]$ は Ω 上の離散型確率測度である．
(2) $\forall\omega\in\Omega$, $\mathbb{P}[\{\omega\}\,|\,B]=\mathbb{P}[B]^{-1}\mathbb{P}[\{\omega\}]\mathbb{1}_B(\omega)$ である．
(i) 期待値の定義（定義3.4）により

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X\,|\,B]&=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}[B]^{-1}\mathbb{P}[\{\omega\}]\mathbb{1}_B(\omega)\\ &=\mathbb{P}[B]^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{P}[\{\omega\}] \quad (3.9)\\ &=\frac{1}{\mathbb{P}[B]}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B].\end{aligned}$$

(ii) 仮定と(i)により(3.9)で X の代わりに $|X|$ としたものは有限値であり，すると X に対し(3.9)がそのまま成立つ．■

§4. 確率分布の例

用語 定義3.2-(2)にならい，可算集合 S 上の離散型確率測度のことを S 上の（確率）分布（(probability) distribution）もしくは（確率）法則（(probability) law）とも言う．

例4.1（Bernoulli分布 $\mathrm{Be}(p)$）$p\in[0,1]$ とする．$\{0,1\}$ 上の分布 $\mathrm{Be}(p)$ を次で定める：$\mathrm{Be}(p)(\{0\}):=1-p$, $\mathrm{Be}(p)(\{1\}):=p$.
（確率 p のBernoulli分布）

例4.2（二項分布 $B(n,p)$）$n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$ とする．$\{0,1,\ldots,n\}$ 上の分布 $B(n,p)$ を次で定める：

$$B(n,p)(\{k\}):=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k\in\{0,\ldots,n\},$$

ただし $\binom{n}{k}:={}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0^0:=1$.（大きさ n，確率 p の二項分布）

二項定理：$\forall x,y\in\mathbb{C}$, $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$ を思い出すと，$\sum_{k=0}^{n}B(n,p)(\{k\})=(p+(1-p))^n=1$ が分かり，従って $B(n,p)$ は $\{0,\ldots,n\}$ 上の分布である．また $B(1,p)=\mathrm{Be}(p)$.

例4.3（Poisson（ポアソン）分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$）$\lambda\in(0,\infty)$ とする．$\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ を次で定める：

$$\mathrm{Po}(\lambda)(\{n\}):=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

（パラメータ λ のPoisson分布）
$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Po}(\lambda)(\{n\})=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$, 従って $\mathrm{Po}(\lambda)$ は $\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の分布である．

<u>例4.4</u> (幾何分布Geom(α)) $\alpha \in [0,1)$ とする.
$\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の分布 Geom(α) を次で定める:

$$\mathrm{Geom}(\alpha)(\{n\}) := (1-\alpha)\alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(確率αの<u>幾何分布</u>)

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Geom}(\alpha)(\{n\}) = (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha} = 1$ であるので, Geom(α)は$\mathbb{N}\cup\{0\}$上の分布である.

Geom(α)は, 次の性質(<u>無記憶性</u>と呼ばれる)を持つ$\mathbb{N}\cup\{0\}$-値 r.v. Xの分布として特徴付けられる:
$\mathbb{P}[X \geqq n] > 0$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}[X-n=k \mid X \geqq n] = \mathbb{P}[X=k]. \quad \cdots\cdots (4.1)$$

詳細は演習問題とする.

§5. 事象および確率変数の独立性

本§と次§では, 事象および確率変数の独立性の概念を定義し, その重要な帰結を述べる.

引き続き, 本§を通して$(\Omega, \mathbb{P})$を離散型確率空間とする. 天下り的だが, まず事象の独立性を次で定義する:

<u>定義5.1</u> (事象の独立性) $n \in \mathbb{N}$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset 2^\Omega$とする. $\{A_j\}_{j=1}^n$ が ($\mathbb{P}$に関して) <u>独立</u> (independent)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対し$B_j \in \{A_j, \Omega \setminus A_j\}$を任意に取るとき, $\mathbb{P}[\bigcap_{j=1}^n B_j] = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}[B_j]$.

定義5.1は見慣れない形をしていてよく分からない, という印象を抱くかもしれないが, これは次の(多少は見慣れた)性質と同値である:

<u>命題5.2</u> $n \in \mathbb{N}$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset 2^\Omega$ とする. このとき:
$\{A_j\}_{j=1}^n$ は 独立
$\Leftrightarrow {}^\forall J \subset \{1, \ldots, n\}$ ($J \neq \emptyset$), $\mathbb{P}[\bigcap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$.

<u>証明</u> 演習問題とする. ■

定義5.1で考えた事象A_jおよび$\Omega \setminus A_j$は, 確率変数$\mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{A_j}^\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$を用いてそれぞれ$A_j = \{\mathbb{1}_{A_j} = 1\}$, $\Omega \setminus A_j = \{\mathbb{1}_{A_j} = 0\}$と表せることに注意しよう.

一般の確率変数の独立性も, この形の事象たちが同様の等式を満たすことを以って定義する. すなわち:

<u>定義5.3</u> (確率変数の独立性) $n \in \mathbb{N}$とする.
各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対し, S_jを集合, X_jをS_j-値r.v.とする.
$\{X_j\}_{j=1}^n$ が ($\mathbb{P}$に関して) <u>独立</u> (independent)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対し$a_j \in X_j(\Omega)$を任意に取るとき, $\mathbb{P}[\bigcap_{j=1}^n \{X_j = a_j\}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j = a_j]$.

<u>命題5.4</u> $n \in \mathbb{N}$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset 2^\Omega$ とする. このとき:
$\{A_j\}_{j=1}^n$は独立 $\Longleftrightarrow$ $\{\mathbb{1}_{A_j}\}_{j=1}^n$は独立.

<u>証明</u> 命題5.2の直後に注意したこと, および定義5.1と定義5.3より直ちに従う. ■

<u>命題5.5</u> $n \in \mathbb{N}$とし, 各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対しS_jを集合, X_jを S_j-値 r.v. とする. このとき:
$\{X_j\}_{j=1}^n$ は独立
$\Leftrightarrow$ [各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対し$A_j \subset S_j$を任意に取るとき, $\mathbb{P}[\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in A_j\}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j \in A_j]$.

<u>証明</u> ($\Leftarrow$) 各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対し$A_j := \{a_j\}$とおけばよい.
($\Rightarrow$) $\mathbb{P}$の可算加法性と補題2.2により

$$\mathbb{P}[\textstyle\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in A_j\}] = \mathbb{P}[\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in A_j \cap X_j(\Omega)\}]$$

$$\underset{\text{可算加法性}}{=} \sum_{a_1 \in A_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots\cdots \sum_{a_n \in A_n \cap X_n(\Omega)} \mathbb{P}[\textstyle\bigcap_{j=1}^n \{X_j = a_j\}]$$

$$\underset{\text{独立}}{=} \sum_{a_1 \in A_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots\cdots \sum_{a_n \in A_n \cap X_n(\Omega)} \textstyle\prod_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j = a_j]$$

$$\underset{\text{可算加法性}}{=} \textstyle\prod_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j \in A_j \cap X_j(\Omega)]$$

$$= \textstyle\prod_{j=1}^n \mathbb{P}[X_j \in A_j]. \quad ■$$

<u>定理5.6</u> $n \in \mathbb{N}$とし, 各$j \in \{1, \ldots, n\}$に対しS_jを集合, X_jをS_j-値r.v.とする. さらに$\{X_j\}_{j=1}^n$は独立と仮定し, $J \subsetneqq \{1, \ldots, n\}$, $J \neq \emptyset$ とする.
(1) $\{X_j\}_{j \in J}$ は独立である.
(2) $\{(X_j)_{j \in J}, (X_k)_{k \in \{1, \ldots, n\} \setminus J}\}$ は独立である.

証明 (1) 各 $j\in J$ に対し $A_j\subset S_j$ を任意に取り，さらに各 $j\in\{1,\dots,n\}\setminus J$ に対し $A_j:=S_j$ とおく．命題5.5により

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\bigcap_{j\in J}\{X_j\in A_j\}\Big] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j\in A_j\}\Big]\\ &\overset{\{X_j\}_{j=1}^{n}\text{独立, 命題5.5}}{=} \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}[X_j\in A_j]\\ &\overset{\mathbb{P}[\Omega]=1}{=} \prod_{j\in J}\mathbb{P}[X_j\in A_j]\end{aligned}$$

であるので，再び命題5.5により $\{X_j\}_{j\in J}$ は独立である．

(2) $Y:=(X_j)_{j\in J}$, $Z:=(X_k)_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}$ とおき，Yは $\prod_{j\in J}S_j$-値r.v., Zは $\prod_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}S_k$-値r.v. であることに注意して $b=(a_j)_{j\in J}\in\prod_{j\in J}S_j$ と $c=(a_k)_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}\in\prod_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}S_k$ を任意に取る．(1)より $\{X_j\}_{j\in J}$ は独立，$\{X_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}$ も独立であるので，$\{X_j\}_{j=1}^{n}$ の独立性と合わせると

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y=b\text{ かつ }Z=c] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j=a_j\}\Big]\\ &\overset{\{X_j\}_{j=1}^{n}\text{独立}}{=} \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}[X_j=a_j]\\ &= \Big(\prod_{j\in J}\mathbb{P}[X_j=a_j]\Big)\cdot\Big(\prod_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}\mathbb{P}[X_k=a_k]\Big)\\ &\overset{\{X_j\}_{j\in J}\text{独立},\ \{X_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}\text{独立}}{=} \mathbb{P}\Big[\bigcap_{j\in J}\{X_j=a_j\}\Big]\cdot\mathbb{P}\Big[\bigcap_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus J}\{X_k=a_k\}\Big]\\ &= \mathbb{P}[Y=b]\cdot\mathbb{P}[Z=c],\end{aligned}$$

よって $\{Y,Z\}$ は独立である．■

定理5.7 $n\in\mathbb{N}$ とし，各 $j\in\{1,\dots,n\}$ に対し S_j, T_j を集合，X_j を S_j-値r.v., $\varphi_j: S_j\to T_j$ とする．このとき，$\{X_j\}_{j=1}^{n}$ が独立ならば $\{\varphi_j(X_j)\}_{j=1}^{n}$ も独立である．

証明 各 $j\in\{1,\dots,n\}$ に対し $A_j\subset T_j$ を任意に取ると，$\{X_j\}_{j=1}^{n}$ の独立性と命題5.5により

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}\{\varphi_j(X_j)\in A_j\}\Big] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j\in\varphi_j^{-1}(A_j)\}\Big]\\ &\overset{\{X_j\}_{j=1}^{n}\text{独立, 命題5.5}}{=} \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}[X_j\in\varphi_j^{-1}(A_j)]\\ &= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}[\varphi_j(X_j)\in A_j]\end{aligned}$$

であるので，再び命題5.5により $\{\varphi_j(X_j)\}_{j=1}^{n}$ は独立である．■

定理5.8 S,Tを集合，XをS-値r.v., YをT-値r.v.とし，$\{X,Y\}$は独立であるとする．

(1) $f: S\times T\to[0,\infty]$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X,Y)] &= \sum_{a\in X(\Omega)}\Big(\sum_{b\in Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\ &= \sum_{b\in Y(\Omega)}\Big(\sum_{a\in X(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\Big)\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\}). \quad (5.1)\end{aligned}$$

(2) $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ とし，(5.1)の3辺でfの代わりに$|f|$としたもののうち少なくとも1つ（従って(1)により3つとも）が有限と仮定する．このとき

- $\forall a\in X(\Omega)$, $\sum_{b\in Y(\Omega)}|f(a,b)|\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})<\infty$ または $\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})=0$,
- $\sum_{a\in X(\Omega)}\Big|\sum_{b\in Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})<\infty$,
- $\forall b\in Y(\Omega)$, $\sum_{a\in X(\Omega)}|f(a,b)|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})<\infty$ または $\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})=0$,
- $\sum_{b\in Y(\Omega)}\Big|\sum_{a\in X(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\Big|\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})<\infty$,

かつ(5.1)が成り立つ．ただし上記および(5.1)中の和 $\sum_{a\in X(\Omega)}(\cdots)_a\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})$, $\sum_{b\in Y(\Omega)}(\cdots)_b\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})$ において，$\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})=0$ を満たす $a\in X(\Omega)$ および $\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})=0$ を満たす $b\in Y(\Omega)$ に対応する項は0とする．

証明 $Z:=(X,Y)$とおく．Zは$S\times T$-値r.v.であり，また$Z(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$であることに注意し，以下$\mathbb{P}\circ Z^{-1}$を$X(\Omega)\times Y(\Omega)$上の分布とみなす（注意3.3を参照のこと）．

(1) 定理3.6-(1)と$\{X,Y\}$の独立性および定理1.13-(1)により

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Z)] &= \sum_{(a,b)\in Z(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ Z^{-1}(\{(a,b)\}) \quad\cdots\cdots(5.2)\\ &\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=} \sum_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}[Z=(X,Y)=(a,b)]\\ &= \sum_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}[X=a,Y=b]\\ &\overset{\{X,Y\}\text{独立}}{=} \sum_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\\ &= \sum_{a\in X(\Omega)}\Big(\sum_{b\in Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\Big)\\ &\overset{\text{定理1.13-(1)}}{=} \sum_{a\in X(\Omega)}\Big(\sum_{b\in Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\ &= \sum_{b\in Y(\Omega)}\Big(\sum_{a\in X(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big)\\ &= \sum_{b\in Y(\Omega)}\Big(\sum_{a\in X(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\Big)\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\end{aligned}$$

となるので，(5.1)が成り立つ．

(2) $\mathbb{E}[|f(Z)|]<\infty$ であるとの仮定と(5.2)でfの代わりに$|f|$としたものにより，$\{f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\}_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ が定理1.13-(2)の仮定を満たすことが分かり，従って定理1.13-(2)により次が得られる：

- $\forall a\in X(\Omega)$, $\sum_{b\in Y(\Omega)}|f(a,b)|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})<\infty$,
- $\sum_{a\in X(\Omega)}\Big|\sum_{b\in Y(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big|<\infty$,
- $\forall b\in Y(\Omega)$, $\sum_{a\in X(\Omega)}|f(a,b)|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})<\infty$,
- $\sum_{b\in Y(\Omega)}\Big|\sum_{a\in X(\Omega)}f(a,b)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\,\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})\Big|<\infty$.

ここで「$\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})=0$を満たす$a\in X(\Omega)$や$\mathbb{P}\circ Y^{-1}(\{b\})$を満たす$b\in Y(\Omega)$に対応する項は0」との規則に注意すると，上記4事実は最初の4主張とそれぞれ同値，かつ定理1.13-(2)の(1.4)により上記(5.2)が全てそのまま成り立つことが分かり(5.1)を得る．■

定理5.9 $n\in\mathbb{N}$とし，各$j\in\{1,\dots,n\}$に対しS_jを集合，X_jをS_j-値r.v.，$f_j: S_j\to\mathbb{C}$は$\mathbb{E}[|f_j(X_j)|]<\infty$を満たすとし，さらに$\{X_j\}_{j=1}^n$は独立と仮定する．このとき$\mathbb{E}[|\prod_{j=1}^n f_j(X_j)|]<\infty$ かつ

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)\Big]=\prod_{j=1}^n \mathbb{E}[f_j(X_j)].$$

証明 nについての数学的帰納法により証明する．$n=1$のときは主張は自明に成り立つ．そこで$n\geqq 2$とし，nの代わりに$n-1$とした主張の成立を仮定する．$S:=\prod_{j=1}^{n-1}S_j$とおき，S-値r.v. Xを$X:=(X_j)_{j=1}^{n-1}$で，$f:S\to\mathbb{C}$を$f(x_1,\dots,x_{n-1}):=\prod_{j=1}^{n-1}f_j(x_j)$で定める．すると定理5.6-(1)により$\{X_j\}_{j=1}^{n-1}$は独立なので数学的帰納法の仮定により

$$\mathbb{E}[|f(X)|]=\mathbb{E}\Big[\Big|\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_j)\Big|\Big]<\infty \text{ かつ}$$
$$\mathbb{E}[f(X)]=\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n-1} f_j(X_j)\Big]=\prod_{j=1}^{n-1}\mathbb{E}[f_j(X_j)]. \quad (5.3)$$

さらに定理5.6-(2)により$\{X,X_n\}$は独立であって，かつ

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in X(\Omega)}\Big(\sum_{b\in X_n(\Omega)}|f(a)f_n(b)|\,\mathbb{P}\circ X_n^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&=\sum_{a\in X(\Omega)}\Big(|f(a)|\sum_{b\in X_n(\Omega)}|f_n(b)|\,\mathbb{P}\circ X_n^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&\overset{\text{定理3.6-(1)}}{=}\sum_{a\in X(\Omega)}|f(a)|\cdot\mathbb{E}[|f_n(X_n)|]\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&=\mathbb{E}[|f_n(X_n)|]\sum_{a\in X(\Omega)}|f(a)|\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&\overset{\text{定理3.6-(1)}}{=}\mathbb{E}[|f_n(X_n)|]\cdot\mathbb{E}[|f(X)|]<\infty.
\end{aligned}$$

よって定理5.8-(2)により，$\mathbb{E}[|f(X)f_n(X_n)|]<\infty$ かつ

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(X)f_n(X_n)]\\
&\overset{(5.1)}{=}\sum_{a\in X(\Omega)}\Big(\sum_{b\in X_n(\Omega)}f(a)f_n(b)\,\mathbb{P}\circ X_n^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&=\sum_{a\in X(\Omega)}\Big(f(a)\sum_{b\in X_n(\Omega)}f_n(b)\,\mathbb{P}\circ X_n^{-1}(\{b\})\Big)\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&\overset{\text{定理3.6-(2)}}{=}\sum_{a\in X(\Omega)}f(a)\cdot\mathbb{E}[f_n(X_n)]\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&=\mathbb{E}[f_n(X_n)]\sum_{a\in X(\Omega)}f(a)\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\{a\})\\
&\overset{\text{定理3.6-(2)}}{=}\mathbb{E}[f_n(X_n)]\cdot\mathbb{E}[f(X)]\\
&\overset{(5.3)}{=}\prod_{j=1}^n\mathbb{E}[f_j(X_j)],
\end{aligned}$$

すなわち$\mathbb{E}[|\prod_{j=1}^n f_j(X_j)|]<\infty$ かつ

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)\Big]=\prod_{j=1}^n\mathbb{E}[f_j(X_j)]$$

となり，nに対する主張が得られた．ゆえに数学的帰納法により，主張は成り立つ．■

§6. 独立確率変数の和

引き続き，本§を通して$(\Omega,\mathbb{P})$を離散型確率空間とする．

定理6.1 $n\in\mathbb{N}$とし，$\{X_j\}_{j=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$は独立とする．このとき

$$var\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)=\sum_{j=1}^n var(X_j).$$

証明 命題3.8より$\sum_{j=1}^n X_j\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$であり，命題3.9(2)，命題3.5-(2)と合わせて$\{X_j\}_{j=1}^n\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$，$\sum_{j=1}^n X_j\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ かつ $\mathbb{E}[\sum_{j=1}^n X_j]=\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[X_j]$ である．また，$j\neq k$を満たす任意の$j,k\in\{1,\dots,n\}$に対し，定理5.6(1)より$\{X_j,X_k\}$は独立であり，従って定理5.9により

$$\mathbb{E}[|(X_j-\mathbb{E}[X_j])(X_k-\mathbb{E}[X_k])|]<\infty \text{ かつ}$$
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X_j-\mathbb{E}[X_j])(X_k-\mathbb{E}[X_k])]\\
&\overset{\text{定理5.9}}{=}\mathbb{E}[X_j-\mathbb{E}[X_j]]\cdot\mathbb{E}[X_k-\mathbb{E}[X_k]] \quad \text{------}(6.1)\\
&\overset{\text{命題3.5-(2)}}{=}(\mathbb{E}[X_j]-\mathbb{E}[X_j]\cdot 1)(\mathbb{E}[X_k]-\mathbb{E}[X_k]\cdot 1)=0.
\end{aligned}$$

以上の事実と定義3.10-(1)および命題3.5-(2)により

$$\begin{aligned}
var\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)&\overset{\text{定義3.10-(1)}}{=}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^n X_j-\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^n X_j\Big]\Big)^2\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^n (X_j-\mathbb{E}[X_j])\Big)^2\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\sum_{j,k=1}^n (X_j-\mathbb{E}[X_j])(X_k-\mathbb{E}[X_k])\Big]\\
&\overset{\text{命題3.5(2)}}{=}\sum_{j,k=1}^n\mathbb{E}[(X_j-\mathbb{E}[X_j])(X_k-\mathbb{E}[X_k])]\\
&\overset{(6.1)}{=}\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[(X_j-\mathbb{E}[X_j])^2]\\
&\overset{\text{定義3.10(1)}}{=}\sum_{j=1}^n var(X_j).
\end{aligned}$$
■

例6.2 $p\in[0,1]$とする．

(1) Xが$\{0,1\}$-値r.v.でその分布が$Be(p)$(例4.1)ならば，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X]\overset{\text{系3.11-(1)}}{=}\sum_{a=0}^1 a\cdot Be(p)(\{a\})=0(1-p)+1\cdot p=p,\\
&\mathbb{E}[X^2]\overset{\text{系3.11-(2)}}{=}\sum_{a=0}^1 a^2\cdot Be(p)(\{a\})=0^2(1-p)+1^2 p=p,\\
&var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=p-p^2=p(1-p).
\end{aligned}$$

(2) $n\in\mathbb{N}$とし，$\{X_j\}_{j=1}^n$を独立な$\{0,1\}$-値r.v.'sで$\forall j\in\{1,\dots,n\}$, $\mathbb{P}\circ X_j^{-1}=Be(p)$を満たすものとする．

● $S:=\sum_{j=1}^n X_j$の分布は$B(n,p)$である．

$$\left(\because\ \forall k\in\{0,\dots,n\},\ \mathbb{P}\circ S^{-1}(\{k\})=\mathbb{P}[S=k]=\underbrace{\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n,\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}}_{\binom{n}{k}\text{個}}\mathbb{P}[X_1=\alpha_1,\dots,X_n=\alpha_n]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.//\right)$$

するとB(n,p)を分布とするreal r.v.の期待値・分散は

$$\mathbb{E}[S]\overset{\text{命題3.5}}{=}\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[X_j]=np,\qquad var(S)\overset{\text{定理6.1}}{=}\sum_{j=1}^n var(X_j)=np(1-p).$$

一般に，独立な確率変数の和の分布は，和の各項の分布の間の次の演算により与えられる：

<u>定義6.3</u> (たたみ込み(合成積)) $d\in\mathbb{N}$とし，各$j\in\{1,2\}$に対し$S_j\subset\mathbb{R}^d$を可算集合，μ_jをS_j上の離散型測度とする。このとき$S_1+S_2:=\{x_1+x_2\mid x_1\in S_1,\ x_2\in S_2\}$上の離散型測度$\mu_1*\mu_2$を，各$x\in S_1+S_2$に対し

$$\mu_1*\mu_2(\{x\}):=\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2\\ x_1+x_2=x}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\}) \tag{6.2}$$

で定め，これをμ_1とμ_2の<u>たたみ込み</u>(合成積, convolution)という。

<u>命題6.4</u> $d\in\mathbb{N}$とし，各$j\in\{1,2,3\}$に対し$S_j\subset\mathbb{R}^d$を可算集合，μ_jをS_j上の離散型測度とする。

(1) $\mu_1*\mu_2(S_1+S_2)=\mu_1(S_1)\mu_2(S_2)$。特に，$\mu_1$が$S_1$上の分布かつ$\mu_2$が$S_2$上の分布ならば$\mu_1*\mu_2$は$S_1+S_2$上の分布である。

(2) $\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$。

(3) $(\mu_1*\mu_2)*\mu_3=\mu_1*(\mu_2*\mu_3)$。

<u>証明</u> (1) (6.2)の両辺の$x\in S_1+S_2$についての和を取ると

$$\begin{aligned}
\mu_1*\mu_2(S_1+S_2)&=\sum_{x\in S_1+S_2}\mu_1*\mu_2(\{x\})\\
&\overset{(6.2)}{=}\sum_{x\in S_1+S_2}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2\\ x_1+x_2=x}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\\
&\overset{\text{定理1.15-(1)}}{=}\sum_{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\\
&\overset{\text{定理1.13-(1)}}{=}\sum_{x_1\in S_1}\Big(\sum_{x_2\in S_2}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\Big)\\
&=\sum_{x_1\in S_1}\Big(\mu_1(\{x_1\})\sum_{x_2\in S_2}\mu_2(\{x_2\})\Big)\\
&=\sum_{x_1\in S_1}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(S_2)\\
&=\Big(\sum_{x_1\in S_1}\mu_1(\{x_1\})\Big)\mu_2(S_2)\\
&=\mu_1(S_1)\mu_2(S_2).
\end{aligned}$$

(2) $\forall(x_1,x_2)\in S_1\times S_2$, $x_1+x_2=x_2+x_1$ かつ $\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})=\mu_2(\{x_2\})\mu_1(\{x_1\})$ であることと(6.2)により，$\forall x\in S_1+S_2=S_2+S_1$, $\mu_1*\mu_2(\{x\})=\mu_2*\mu_1(\{x\})$が直ちに得られ，従って$\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$。

(3) $S_1+S_2+S_3:=\{x_1+x_2+x_3\mid x_1\in S_1,\ x_2\in S_2,\ x_3\in S_3\}$とおくと$(S_1+S_2)+S_3=S_1+S_2+S_3=S_1+(S_2+S_3)$であることは容易に分かる。さらに$\forall x\in S_1+S_2+S_3$,

$$\begin{aligned}
(\mu_1*\mu_2)*\mu_3(\{x\})&\overset{(6.2)}{=}\sum_{\substack{(y,x_3)\in(S_1+S_2)\times S_3\\ y+x_3=x}}\mu_1*\mu_2(\{y\})\mu_3(\{x_3\})\\
&\overset{(6.2)}{=}\sum_{\substack{(y,x_3)\in(S_1+S_2)\times S_3\\ y+x_3=x}}\Bigg(\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2\\ x_1+x_2=y}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\Bigg)\mu_3(\{x_3\})\\
&\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=}\sum_{(y,x_3)\in(S_1+S_2)\times S_3}\mathbb{1}_{\{x\}}(y+x_3)\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2\\ x_1+x_2=y}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\mu_3(\{x_3\})\\
&\overset{\text{定理1.13-(1)}}{=}\sum_{x_3\in S_3}\sum_{y\in S_1+S_2}\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2\\ x_1+x_2=y}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\mu_3(\{x_3\})\times\mathbb{1}_{\{x\}}(x_1+x_2+x_3)\\
&\overset{\text{定理1.15-(1)}}{=}\sum_{x_3\in S_3}\sum_{(x_1,x_2)\in S_1\times S_2}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\mu_3(\{x_3\})\mathbb{1}_{\{x\}}(x_1+x_2+x_3)\\
&\overset{\text{定理1.13-(1)}}{=}\sum_{(x_1,x_2,x_3)\in S_1\times S_2\times S_3}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\mu_3(\{x_3\})\mathbb{1}_{\{x\}}(x_1+x_2+x_3)\\
&\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=}\sum_{\substack{(x_1,x_2,x_3)\in S_1\times S_2\times S_3\\ x_1+x_2+x_3=x}}\mu_1(\{x_1\})\mu_2(\{x_2\})\mu_3(\{x_3\}) \quad (6.3)
\end{aligned}$$

であり，全く同様の計算により$\mu_1*(\mu_2*\mu_3)(\{x\})$も(6.3)に等しいことが分かる。ゆえに$(\mu_1*\mu_2)*\mu_3=\mu_1*(\mu_2*\mu_3)$。■

<u>定理6.5</u> $d,n\in\mathbb{N}$とし，各$j\in\{1,\dots,n\}$に対しX_jをd-dim. r.v.とする。このとき，$\{X_j\}_{j=1}^n$が独立ならば

$$\mathbb{P}\circ(X_1+\cdots+X_n)^{-1}=(\mathbb{P}\circ X_1^{-1})*\cdots*(\mathbb{P}\circ X_n^{-1}).$$

<u>証明</u> nについての数学的帰納法により証明する。$n=1$のときは主張は自明に成り立つ。そこで$n\geqq 2$とし，nの代わりに$n-1$とした主張の成立を仮定する。$S:=\sum_{j=1}^{n-1}X_j$とおく。定理5.6-(1)により$\{X_j\}_{j=1}^{n-1}$は独立なので，数学的帰納法の仮定により

$$\mathbb{P}\circ S^{-1}=(\mathbb{P}\circ X_1^{-1})*\cdots*(\mathbb{P}\circ X_{n-1}^{-1}). \tag{6.4}$$

一方，$f:(\mathbb{R}^d)^{n-1}\to\mathbb{R}^d$を$f(x_1,\dots,x_{n-1}):=\sum_{j=1}^{n-1}x_j$で定めると，$S=f(X_1,\dots,X_{n-1})$であり，定理5.6-(2)により$\{(X_1,\dots,X_{n-1}),X_n\}$は独立，従って定理5.7により$\{S,X_n\}=\{f(X_1,\dots,X_{n-1}),X_n\}$も独立である。よって$\forall x\in S(\Omega)+X_n(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\circ(S+X_n)^{-1}(\{x\})&=\mathbb{P}[S+X_n=x] \quad (6.5)\\
&=\sum_{(y,x_n)\in S(\Omega)\times X_n(\Omega),\,y+x_n=x}\mathbb{P}[S=y,\ X_n=x_n]\\
&\overset{\{S,X_n\}\text{独立}}{=}\sum_{(y,x_n)\in S(\Omega)\times X_n(\Omega),\,y+x_n=x}\mathbb{P}\circ S^{-1}(\{y\})\mathbb{P}\circ X_n^{-1}(\{x_n\})\\
&\overset{(6.2)}{=}(\mathbb{P}\circ S^{-1})*(\mathbb{P}\circ X_n^{-1})(\{x\}).
\end{aligned}$$

ゆえに $\mathbb{P}\circ(X_1+\cdots+X_n)^{-1}=\mathbb{P}\circ(S+X_n)^{-1}\overset{(6.5)}{=}(\mathbb{P}\circ S^{-1})*(\mathbb{P}\circ X_n^{-1})\overset{(6.4)}{=}(\mathbb{P}\circ X_1^{-1})*\cdots*(\mathbb{P}\circ X_n^{-1})$となり，数学的帰納法が完了した。■

いよいよ，当初からの目標であった大数の法則の定式化と証明を行う。

定理6.6 $n\in\mathbb{N}$とし，$\{X_j\}_{j=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$は独立とする。このとき $S:=\sum_{j=1}^n X_j$とおくと，$\forall\varepsilon\in(0,\infty)$，
$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S}{n}-\frac{\mathbb{E}[S]}{n}\right|\geq\varepsilon\right]\leq\frac{\max_{1\leq j\leq n}\mathrm{var}(X_j)}{n\varepsilon^2}.$$

証明 $v:=\max_{1\leq j\leq n}\mathrm{var}(X_j)$とおく。定理6.1により
$$\mathbb{E}[|S-\mathbb{E}[S]|^2]=\mathrm{var}(S)\overset{\text{定理6.1}}{=}\sum_{j=1}^n\mathrm{var}(X_j)\leq nv \qquad (6.6)$$
であるので，Chebyshevの不等式(3.6)を$p=2$で用いると
$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S}{n}-\frac{\mathbb{E}[S]}{n}\right|\geq\varepsilon\right]=\mathbb{P}[|S-\mathbb{E}[S]|\geq n\varepsilon]\overset{(3.6)\,(p=2)}{\leq}\frac{1}{(n\varepsilon)^2}\mathbb{E}[|S-\mathbb{E}[S]|^2]\overset{(6.6)}{\leq}\frac{v}{n\varepsilon^2}.$$ ■

定理6.7（大数の弱法則）各$n\in\mathbb{N}$に対し，$(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$を離散型確率空間，$\{X_{n,j}\}_{j=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$は$\mathbb{P}_n$に関して独立とし，$S_n:=\sum_{j=1}^n X_{n,j}$，$v_n:=\max_{1\leq j\leq n}\mathrm{var}(X_{n,j})$とおく。このとき，$\sup_{n\in\mathbb{N}}v_n<\infty$ならば$\forall\varepsilon\in(0,\infty)$，$\forall\alpha\in(-\infty,\frac{1}{2})$，
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_n\left[\left|\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}_n[S_n]}{n}\right|\geq\varepsilon n^{-\alpha}\right]=0,$$
ただし$\mathbb{E}_n$はΩ_n上での$\mathbb{P}_n$に関する期待値を表す。

証明 $v:=\sup_{n\in\mathbb{N}}v_n$とおき，$n\in\mathbb{N}$とする。定理6.6を$\varepsilon$の代わりに$\varepsilon n^{-\alpha}$として用い，$1-2\alpha>0$であることに注意すると
$$0\leq\mathbb{P}_n\left[\left|\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}_n[S_n]}{n}\right|\geq\varepsilon n^{-\alpha}\right]\overset{\text{定理6.6}}{\leq}\frac{v}{n(\varepsilon n^{-\alpha})^2}=\frac{v}{\varepsilon^2 n^{1-2\alpha}}\xrightarrow[v<\infty,\,1-2\alpha>0]{n\to\infty}0$$
となり，主張を得る。 ■

注意6.8 (1) 定理6.7において離散型確率空間の無限列$\{(\Omega_n,\mathbb{P}_n)\}_{n=1}^\infty$を考えているのは，分散がいずれも0でないような独立なreal r.v.の無限列を単一の離散型確率空間$(\Omega,\mathbb{P})$上に定義することは（標本空間Ωとして可算集合を用いる限りは）不可能だからである。この制約から逃れるためには測度論に基づいて確率論を展開することが不可欠である。

(2) 単一の確率空間上で定義されたreal r.v.の無限列$\{X_n\}_{n=1}^\infty$に対する「$\{n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j\}_{n=1}^\infty$がある一定値に収束する確率が1」という型の主張を大数の強法則という。これは$\alpha=0$に対する定理6.7の型の主張（普通はこれを大数の弱法則という）を導くことが（測度論を用いることで）証明できるが，(1)で述べた理由からそもそも正確に定式化することさえ測度論なしではできない。

(3) 上記の証明から容易に分かるように，定理6.7の主張は$\{\varepsilon n^{-\alpha}\}_{n=1}^\infty$の代わりに$\lim_{n\to\infty}n^{1/2}a_n=\infty$を満たす任意の$\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$を用いても同様に成立する。一方，$\lim_{n\to\infty}n^{1/2}a_n=\infty$との仮定を弱めることはできないことが次の定理から分かる：

定理6.9（中心極限定理）各$n\in\mathbb{N}$に対し，$(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$を離散型確率空間，$\{X_{n,j}\}_{j=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$は$\mathbb{P}_n$に関して独立とし，さらに$\forall n\in\mathbb{N}$，$\forall j\in\{1,\ldots,n\}$，$\mathbb{P}_n\circ X_{n,j}^{-1}=\mathbb{P}_1\circ X_{1,1}^{-1}$と仮定する。また$m:=\mathbb{E}_1[X_{1,1}]$，$v:=\mathrm{var}(X_{1,1})$，各$n\in\mathbb{N}$に対し$S_n:=\sum_{j=1}^n X_{n,j}$とおき（$\mathbb{E}_1$は$\Omega_1$上での$\mathbb{P}_1$に関する期待値を表す），$v>0$と仮定する。このとき$\forall x\in\mathbb{R}$，
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_n\left[\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}\leq x\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_n\left[\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}<x\right]=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{y^2}{2v}}dy.$$

定理6.9の証明には測度論を用いた多くの準備が必要であり，ここでは扱うことができない。詳細は3年次配当「確率論」に譲る。次の§7で，1次元単純ランダムウォーク（つまり定理6.9で$\mathbb{P}_1\circ X_{1,1}^{-1}(\{\pm1\})=\frac{1}{2}$）の場合に限定して初等的な微積分による証明を与える。

本§の最後に，定理6.6の解析学への応用を1つ紹介する．

<u>定義6.10</u> $f:[0,1]\to\mathbb{R}$は連続とする．各$n\in\mathbb{N}$に対し，xを変数とする$\mathbb{R}$-係数の多項式$B_{f,n}(x)$を

$$B_{f,n}(x):=\sum_{j=0}^{n}f\left(\tfrac{j}{n}\right)\binom{n}{j}x^{j}(1-x)^{n-j}$$

で定め，これをfに対するn次<u>Bernstein多項式</u>という．

<u>定理6.11</u> $f:[0,1]\to\mathbb{R}$は連続とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|=0.$$

<u>証明</u> $|f|$は有界閉区間$[0,1]$上の$\mathbb{R}$-値連続関数なので最大値を持つことに注意し，それをMとおく：$M:=\max_{p\in[0,1]}|f(p)|\in[0,\infty)$．

主張の収束を示すために，$\varepsilon\in(0,\infty)$を任意に取る．fは有界閉区間$[0,1]$上の$\mathbb{R}$-値連続関数なので$[0,1]$上で一様連続であり，従って$\exists\delta\in(0,\infty)$，

$$|x-y|<\delta \text{を満たす任意の} x,y\in[0,1] \text{に対し} \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \quad \cdots\cdots(6.7)$$

$n\in\mathbb{N}$と$p\in[0,1]$を任意に取って固定する．離散型確率空間$(\Omega,\mathbb{P})$を$\Omega:=\{0,1\}^n$，

$$\mathbb{P}[\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\}]:=\prod_{j=1}^{n}p^{\alpha_j}(1-p)^{1-\alpha_j},\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Omega$$

(ただし$0^0:=1$)で定義し，各$j\in\{1,\ldots,n\}$に対し$\{0,1\}$-値r.v. $X_j:\Omega\to\{0,1\}$を$X_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):=\alpha_j$で定める．このとき$\mathbb{P}$の定義から容易に分かるように，$\{X_j\}_{j=1}^{n}$は$\mathbb{P}$に関して独立，かつ$\forall j\in\{1,\ldots,n\}$，$\mathbb{P}\circ X_j^{-1}=\mathrm{Be}(p)$であり，従って例6.2-(2)により$S:=\sum_{j=1}^{n}X_j$は$\mathbb{P}\circ S^{-1}=B(n,p)$であるような$\{0,\ldots,n\}$-値r.v.である．よって定理3.6-(2)により

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right]&=\sum_{j=0}^{n}f\left(\tfrac{j}{n}\right)\mathbb{P}\circ S^{-1}(\{j\})\\&\overset{\mathbb{P}\circ S^{-1}=B(n,p)}{=}\sum_{j=0}^{n}f\left(\tfrac{j}{n}\right)B(n,p)(\{j\})\\&=\sum_{j=0}^{n}f\left(\tfrac{j}{n}\right)\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j}\\&=B_{f,n}(p).\end{aligned} \quad \cdots\cdots(6.8)$$

一方，例6.2-(1)より$\forall j\in\{1,\ldots,n\}$，$\mathrm{var}(X_j)=p(1-p)$であるので，例6.2-(2)より$\mathbb{E}[S]=np$であることにも注意すると定理6.6により

$$\mathbb{P}\left[\left|\tfrac{S}{n}-p\right|\geqq\delta\right]\leqq\frac{p(1-p)}{n\delta^2}\leqq\frac{1}{4\delta^2 n}. \quad \cdots\cdots(6.9)$$

すると(6.8), (6.7), (6.9)により

$$\begin{aligned}|f(p)-B_{f,n}(p)|&\overset{(6.8)}{=}\left|\mathbb{E}[f(p)]-\mathbb{E}\left[f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right]\right|\\&=\left|\mathbb{E}\left[f(p)-f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right]\right|\leqq\mathbb{E}\left[\left|f(p)-f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right|\right]\\&=\mathbb{E}\left[\left|f(p)-f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{\{|\frac{S}{n}-p|<\delta\}}\right]\\&\quad+\mathbb{E}\left[\left|f(p)-f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{\{|\frac{S}{n}-p|\geqq\delta\}}\right]\\&\overset{(6.7)}{\leqq}\mathbb{E}\left[\varepsilon\mathbb{1}_{\{|S/n-p|<\delta\}}\right]\\&\quad+\mathbb{E}\left[\left(|f(p)|+\left|f\left(\tfrac{S}{n}\right)\right|\right)\mathbb{1}_{\{|S/n-p|\geqq\delta\}}\right]\\&\overset{\max|f|=M}{\leqq}\mathbb{E}[\varepsilon]+\mathbb{E}\left[2M\mathbb{1}_{\{|S/n-p|\geqq\delta\}}\right]\\&=\varepsilon+2M\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|S/n-p|\geqq\delta\}}\right]\\&\overset{\text{補題1.14-(1)}}{=}\varepsilon+2M\,\mathbb{P}\left[\left|\tfrac{S}{n}-p\right|\geqq\delta\right]\\&\overset{(6.9)}{\leqq}\varepsilon+\frac{M}{2\delta^2 n}\end{aligned}$$

となるので，結局次が得られたことになる：

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall p\in[0,1],\ |f(p)-B_{f,n}(p)|\leqq\varepsilon+\frac{M}{2\delta^2 n},$$

すなわち

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|\leqq\varepsilon+\frac{M}{2\delta^2 n}. \quad \cdots\cdots(6.10)$$

(6.10)より特に，$n>\frac{M}{2\delta^2\varepsilon}$を満たす任意の$n\in\mathbb{N}$に対し

$$0\leqq\sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|\leqq\varepsilon+\frac{M}{2\delta^2 n}<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

となり，よって$\lim_{n\to\infty}\sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|=0.$ ■

<u>系6.12</u>(Weierstrass(ヴァイエルシュトラス)の多項式近似定理) $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$とし，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$は連続とする．このとき$\mathbb{R}$-係数の1変数多項式の列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|=0.$$

<u>証明</u> $g:[0,1]\to\mathbb{R}$を$g(x):=f(a+x(b-a))$で定めるとgは連続である．そこで$n\in\mathbb{N}$としgに対するn次Bernstein多項式$B_{g,n}(x)$を考え，多項式$f_n(x)$を

$$f_n(x):=B_{g,n}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)\overset{\text{定義6.10}}{=}\sum_{j=0}^{n}f\left(a+\tfrac{j}{n}(b-a)\right)\binom{n}{j}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{j}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-j}$$

で定めると，定理6.11により

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|&=\sup_{x\in[0,1]}|f(a+x(b-a))-f_n(a+x(b-a))|\\&=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-B_{g,n}(x)|\\&\xrightarrow[\text{定理6.11}]{n\to\infty}0\end{aligned}$$

となり，主張を得る． ■

§7. 単純ランダムウォーク

本§では，次で定義されるd次元単純ランダムウォークの詳しい性質について，$d=1$の場合を中心に考察する．$x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$に対し$|x|:=\sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$とおく．

定義7.1 $d\in\mathbb{N}$とし，$E_d:=\{x\in\mathbb{Z}^d \mid |x|=1\}$とおく．$(\Omega,\mathbb{P})$を離散型確率空間，$N\in\mathbb{N}$とし，$\{X_j\}_{j=1}^N$を$(\Omega,\mathbb{P})$上で定義された独立な$E_d$値r.v.の列で$\forall j\in\{1,\dots,N\}$, $\forall x\in E_d$,

$$\mathbb{P}\circ X_j^{-1}(\{x\})=\frac{1}{2d}$$

を満たすものとする．このとき，$n\in\{0,\dots,N\}$に対し

$$S_n:=\sum_{j=1}^n X_j \quad (S_0:=0)$$

で定義される$\mathbb{Z}^d$-値r.v.の列$\{S_n\}_{n=0}^N$をd次元単純ランダムウォークという．

注意7.2 (1) 注意6.8-(1)で述べたのと同じ理由で，離散型確率空間の枠組みではr.v.の無限列$\{X_j\}_{j=1}^\infty$, $\{S_j\}_{j=0}^\infty$を考えることはできない．以下の議論で考察の対象とするのは各$n\in\{1,\dots,N\}$におけるS_nの分布$\mathbb{P}\circ S_n^{-1}$だけであり，定理6.5により

$$\mathbb{P}\circ S_n^{-1}=\underbrace{\mu_d*\cdots*\mu_d}_{n\text{個}}\left(=:\mu_d^{*n}\right) \quad\text{(7.1)}$$

(ただしμ_dは$\mu_d(\{x\}):=\frac{1}{2d}$, $x\in E_d$, で与えられるE_d上の分布)であることからも分かるように$\mathbb{P}\circ S_n^{-1}$はdとnだけで決まり$(\Omega,\mathbb{P})$, N, $\{X_j\}_{j=1}^N$の取り方には依存しない．

(2) 定義7.1のような$(\Omega,\mathbb{P})$と$\{X_j\}_{j=1}^N$は存在する．実際，$\Omega:=E_d^N$, 各$\omega\in\Omega$に対し$\mathbb{P}[\{\omega\}]:=\left(\frac{1}{2d}\right)^N$とし，各$j\in\{1,\dots,N\}$に対し$X_j(x_1,\dots,x_N):=x_j$で$X_j:\Omega\to E_d$を定めればよい．

以下，本§では定義7.1の設定を固定し，さらに特に断らない限り$d=1$と仮定する．

まず最初に考えるべきなのは，S_nは典型的にはどの程度の大きさか(どの程度原点0から離れているか)，という点であろう．次の命題から(S_n自身の平均は0であるが)「$|S_n|$は平均的には$\sqrt{n}$程度(以下)である」ことが分かる．

命題7.3 $n\in\{1,\dots,N\}$とする．
(1) $\mathbb{E}[S_n]=0$. (2) $\mathbb{E}[S_n^2]=n$.

証明 (1) $\forall j\in\{1,\dots,n\}$に対し系3.11-(1)により

$$\mathbb{E}[X_j]=\sum_{a\in\{-1,1\}}a\,\mathbb{P}\circ X_j^{-1}(\{a\})=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0$$

であるので，$\mathbb{E}[S_n]=\mathbb{E}[\sum_{j=1}^n X_j]=\sum_{j=1}^n\mathbb{E}[X_j]=0$.

(2) $\forall j\in\{1,\dots,n\}$に対し，系3.11-(2)により

$$\mathbb{E}[X_j^2]=\sum_{a\in\{-1,1\}}a^2\,\mathbb{P}\circ X_j^{-1}(\{a\})=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)^2\cdot\frac{1}{2}=1,$$

従って$var(X_j)=\mathbb{E}[X_j^2]-\mathbb{E}[X_j]^2=1$であるので，定理5.6-(1)より$\{X_j\}_{j=1}^n$が独立であることと定理6.1により

$$\mathbb{E}[S_n^2]=var(S_n)=var\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\overset{\text{定理6.1}}{=}\sum_{j=1}^n var(X_j)=n. \quad ■$$

以下，S_nの分布$\mathbb{P}\circ S_n^{-1}\overset{(7.1)}{=}\mu_1^{*n}$の詳細な解析を行う．まず，これを具体的に計算すると次のようになる．

命題7.4 $n\in\{1,\dots,N\}$, $j\in\mathbb{Z}$とする．
(1) $n-j$が奇数または$|j|>n$ならば$\mathbb{P}[S_n=j]=0$.
(2) $n-j$が偶数で$|j|\le n$ならば

$$\mathbb{P}[S_n=j]=\frac{n!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!\left(\frac{n-j}{2}\right)!}2^{-n}. \quad\text{(7.2)}$$

証明 (1)
$$S_n-j=\sum_{k=1}^n X_k-n+n-j=\sum_{k=1}^n(X_k-1)+(n-j)$$
であるので，$n-j$が奇数ならばS_n-jも奇数，従って$S_n-j\ne0$となり，よって$\mathbb{P}[S_n=j]=\mathbb{P}[\phi]=0$.
また3角不等式により
$$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|\le\sum_{k=1}^n|X_k|=n$$
であるので，$|j|>n$ならば$\mathbb{P}[S_n=j]=\mathbb{P}[\phi]=0$.

(2) $k\in\{0,\dots,n\}$とし，$\omega\in\Omega$は
$$\#\{m\in\{1,\dots,n\}\mid X_m(\omega)=1\}=k$$
をみたすとする．このとき$\{X_m(\omega)\}_{m=1}^n$のうちk個が1，$(n-k)$個が-1であるので$S_n(\omega)=\sum_{m=1}^n X_m(\omega)=k+(-1)(n-k)=2k-n$であり，従って$S_n(\omega)=j\iff k=\frac{n+j}{2}$，よって

$$\{S_n=j\}=\left\{X_1,\dots,X_n\text{のうち，ちょうど}\tfrac{n+j}{2}\text{個が}1\right\} \quad\text{(7.3)}$$

(仮定より$\frac{n+j}{2}\in\{0,\dots,n\}$であることに注意)．例6.2-(2)と全く同様の計算により(7.3)の右辺の事象の確率は$B(n,\frac{1}{2})(\{\frac{n+j}{2}\})=\frac{n!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!\left(\frac{n-j}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$に等しいので，これと(7.3)より(7.2)を得る． ■

(7.2)は正確ではあるが，階乗の比を含むため「どの程度の大きさなのか」はこのままではよく分からない。この疑問に答えるため，まず$n!$の大きさの精密な評価を与える次の定理を証明する。なお本§の上以降の記述は概ね

[Lawler] Gregory F. Lawler, Random Walk and the Heat Equation, American Mathematical Society, 2010

の"§1.1. Simple random walk"に従っている。

定理7.5 $\left\{\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は$\mathbb{R}$において収束し，$C_0:=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}$ とおくと $C_0\in(0,\infty)$ かつ

($C_0=\sqrt{2\pi}$ を後に定理7.14で示す)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n!=C_0\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad\cdots(7.4)$$

ただし$O(\frac{1}{n})$は「その絶対値が$\frac{c}{n}$以下($c\in(0,\infty)$でcは$n\in\mathbb{N}$に依存しない)となっているような項」を表す。

定理7.5の証明のために，まず無限積の収束に関する基本的事実である次の定理を示す。

定理7.6 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}\setminus\{-1\}$は$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$を満たすとする。このとき，各$n\in\mathbb{N}$に対し

$$S_n:=\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)$$

とおくと，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\mathbb{C}$において収束し，$S_\infty:=\lim_{n\to\infty}S_n$ とおくと $S_\infty\neq0$. さらに $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N_1$,

$$\left|\frac{S_n}{S_\infty}-1\right|\leqq2\sum_{j=n+1}^{\infty}|z_j|.\quad\cdots(7.5)$$

定理7.5および定理7.6の証明には次の補題を用いる。

補題7.7 $\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,

$$\left|\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\right|\leqq\frac{8}{3}|x|^3.\quad\cdots(7.6)$$

特に$\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$,

$$\frac{1}{12}\leqq\left|\frac{\log(1+x)}{x}\right|\leqq\frac{23}{12}.\quad\cdots(7.7)$$

証明 $x\in(-1,\infty)$に対し$f(x):=\log(1+x)$とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},$$

特に $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1$, かつ

$$\forall x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\ 0<f'''(x)\leqq f'''(-\tfrac{1}{2})=16.\quad\cdots(7.8)$$

そこでfに対してTaylorの定理を適用すると，$\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\exists\theta\in(0,1)$,

$$\left|\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\right|=\left|\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)\right|\overset{(7.8)}{\leqq}\frac{8}{3}|x|^3$$

となり(7.6)が得られる。さらに$\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$に対し3角不等式と(7.6)により

$$\left|\frac{\log(1+x)}{x}\right|\leqq\frac{1}{|x|}\left|\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\right|+\left|\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x}\right|$$
$$\overset{(7.6)}{\leqq}\frac{8}{3}x^2+1-\frac{1}{2}x\leqq\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{12},$$

$$\left|\frac{\log(1+x)}{x}\right|\geqq\left|\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x}\right|-\frac{1}{|x|}\left|\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2\right|$$
$$\overset{(7.6)}{\geqq}1-\frac{1}{2}x-\frac{8}{3}x^2\geqq1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{12}$$

となるので，(7.7)が成り立つ。 ■

定理7.6の証明

まず，$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$であることから，$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$とすると

$$|z_n|=\sum_{j=1}^{n}|z_j|-\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|\xrightarrow{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|-\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|=0,$$

よって $\lim_{n\to\infty}|z_n|=0$ であることに注意する。特に，$\exists N_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqq N_0$, $|z_n|\leqq\frac{1}{2}$.

さて，$m,n\in\mathbb{N}$, $m>n\geqq N_0$とする。このとき，$\forall x\in[0,\infty)$, $0\leqq\log(1+x)\leqq x$であることに注意すると

$$\log\left|\frac{S_m}{S_n}\right|=\log\left|\prod_{j=n+1}^{m}(1+z_j)\right|=\log\left(\prod_{j=n+1}^{m}|1+z_j|\right)$$
$$=\sum_{j=n+1}^{m}\log|1+z_j|\leqq\sum_{j=n+1}^{m}\log(1+|z_j|)$$
$$\leqq\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|,\quad\cdots(7.9)$$

他方(7.7)を用いると

$$\log\left|\frac{S_m}{S_n}\right|=\sum_{j=n+1}^{m}\log|1+z_j|\geqq\sum_{j=n+1}^{m}\log(1-|z_j|)$$
$$\geqq-2\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|.\quad\cdots(7.10)$$

ここで

$$0\leqq\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|=\sum_{j=1}^{m}|z_j|-\sum_{j=1}^{n}|z_j|$$
$$\leqq\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|-\sum_{j=1}^{n}|z_j|\xrightarrow{n\to\infty}0\quad\cdots(7.11)$$

であり，特に$\exists N_1\geqq N_0$, $\forall m>\forall n\geqq N_1$, $0\leqq\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|\leqq\frac{1}{2}\log2$ となることに注意し，$m>n\geqq N_1$を満たす$m,n\in\mathbb{N}$を任意に取る。このとき(7.9)と(7.10)より $\frac{1}{2}\leqq\left|\frac{S_m}{S_n}\right|\leqq2$ であるので

$$\left|\frac{S_n}{S_m}-1\right|=\left|\sum_{j=n+1}^{m}\frac{S_j-S_{j-1}}{S_m}\right|=\left|\sum_{j=n+1}^{m}\frac{(1+z_j)S_{j-1}-S_{j-1}}{S_m}\right|\quad\cdots(7.12)$$
$$\leqq\sum_{j=n+1}^{m}\left|\frac{S_{j-1}}{S_m}\right||z_j|\leqq2\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|.$$

従って

$$|S_n-S_m|=|S_{N_1}|\cdot\left|\frac{S_m}{S_{N_1}}\right|\cdot\left|\frac{S_n}{S_m}-1\right|\overset{(7.12)}{\leqq}|S_{N_1}|\cdot2\cdot2\sum_{j=n+1}^{m}|z_j|\xrightarrow[(7.11)]{n\to\infty}0$$

となるので$\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$は$\mathbb{C}$におけるCauchy列であり，よって$\mathbb{C}$の完備性により$\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$は$\mathbb{C}$においてある$S_\infty\in\mathbb{C}$に収束する。あとは絶対値$|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$の連続性に注意すると，$|S_\infty/S_{N_1}|=\lim_{j\to\infty}|S_j/S_{N_1}|\geqq\frac{1}{2}>0$より$S_\infty\neq0$であり，(7.12)の$m\to\infty$のときの極限を取ることで(7.5)が従う。 ■

定理7.5の証明

$b_0:=1$とし，各$n\in\mathbb{N}$に対し$b_n:=\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}$とおき，さらに$a_n:=\frac{b_n}{b_{n-1}}-1\ (\in(-1,\infty))$とおく．$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$b_n=\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j}{b_{j-1}}=\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \quad\text{(7.13)}$$

である．そこで定理7.6を適用するために，次を示そう：

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ \text{すなわち}\ \exists c_1\in(0,\infty),\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leq\frac{c_1}{n^2}. \quad\text{(7.14)}$$

実際，$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$を任意に取ると，

$$1+a_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}\cdot\frac{\sqrt{n-1}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}{(n-1)!}=e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2}=e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}$$

であり，(7.6)により

$$\left|\log\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)+\frac{1}{2n}\right|=\left|1+n\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}\right|=n\left|\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right|\overset{(7.6)}{\leq}\frac{8}{3}\frac{1}{n^2},$$

$$\left|\log\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)-\frac{1}{2n}\right|=\left|-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}\right|\leq\frac{1}{2}\left|\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right|+\frac{1}{4n^2}\overset{(7.6)}{\leq}\frac{4}{3}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{4n^2}\leq\frac{2}{3}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^2}=\frac{11}{12}\frac{1}{n^2}$$

であるので，

$$|\log(1+a_n)|=\left|\log\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)\right|\leq\left|\log\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)+\frac{1}{2n}\right|+\left|\log\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right)-\frac{1}{2n}\right|\leq\frac{8}{3}\frac{1}{n^2}+\frac{11}{12}\frac{1}{n^2}=\frac{43}{12}\frac{1}{n^2}<\frac{4}{n^2}\leq 1. \quad\text{(7.15)}$$

また$n=1$のときは$\log(1+a_1)=\log b_1=\log e=1$．特に(7.15)と合わせて$\forall n\in\mathbb{N}$, $|\log(1+a_n)|\leq\min\{\frac{4}{n^2},1\}$なので，平均値の定理により$\exists\theta_n\in[-1,1]$,

$$|a_n|=\left|e^{\log(1+a_n)}-1\right|=\left|e^{\theta_n}\log(1+a_n)\right|\overset{(7.15)}{\leq}\frac{4e}{n^2}$$

となり，(7.14)が$c_1=4e$で成り立つことが示せた．

さて，(7.13)と(7.14)を踏まえて，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(-1,\infty)$に定理7.6を適用しよう．各$n\in\mathbb{N}$に対し(7.14)により

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_j|\leq\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{4e}{j^2}\leq\sum_{j=n+1}^{\infty}\int_{j-1}^{j}\frac{4e}{x^2}dx=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=n+1}^{m}\left(\frac{4e}{j-1}-\frac{4e}{j}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{4e}{n}-\frac{4e}{m}\right)=\frac{4e}{n}<\infty, \quad\text{(7.16)}$$

特に$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\leq|a_1|+4e<\infty$なので定理7.6により$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$はある$c_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$に$\mathbb{C}$において収束し，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$なので$c_0\in[0,\infty)\setminus\{0\}=(0,\infty)$．さらにまた定理7.6の(7.5)を(7.16)と合わせることにより，$\exists N_1\in\mathbb{N},\forall n\geq N_1$,

$$\left|\frac{b_n}{c_0}-1\right|\overset{(7.5)}{\leq}2\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_j|\overset{(7.16)}{\leq}\frac{8e}{n}. \quad\text{(7.17)}$$

そこで$c_2:=\max_{1\leq n\leq N_1}n\left|\frac{b_n}{c_0}-1\right|$, $c_3:=\max\{8e,c_2\}$とおくとc_2,c_3の定義と(7.17)により$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{b_n}{c_0}-1\right|\leq\frac{c_3}{n}$となり，これは(7.4)に他ならない．■

定理7.5を用いて，命題7.4で求めた確率の値(7.2)の$n\to\infty$のときの挙動を解析しよう．離散型確率空間を固定したままでは固定されたN以下の$n\in\mathbb{N}$に対してしかS_nを考えることができないが，この制約に伴い結果の記述が煩雑になるのを避けるために次の記号を導入する．

定義7.8 $n\in\mathbb{N}$とする．

(1) $j\in\mathbb{Z}$に対し$P_n(j):=\mu_1^{*n}(\{j\})$と定める．

(2) $A\subset\mathbb{R}$に対し$\nu_n(A):=\sum_{j\in\mathbb{Z},\frac{j}{\sqrt{n}}\in A}P_n(j)$と定める．

(7.1)により，$\forall n\in\{1,\ldots,N\}$, $\forall j\in\mathbb{Z}$, $\forall A\subset\mathbb{R}$,

$$P_n(j)=\mathbb{P}[S_n=j], \quad\text{(7.18)}$$

$$\nu_n(A)=\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in A\right] \quad\text{(7.19)}$$

であることに注意する．定義7.1(および注意7.2-(2))において$N\in\mathbb{N}$は任意に大きく取れるので，命題7.4より次を得る．

命題7.9 $n\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{Z}$とする．

(1) $n-j$が奇数または$|j|>n$ならば$P_n(j)=0$．

(2) $n-j$が偶数で$|j|\leq n$ならば

$$P_n(j)=\frac{n!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!\left(\frac{n-j}{2}\right)!}2^{-n}. \quad\text{(7.20)}$$

以下の議論における近似誤差の評価のために，次の補題が必要である．

補題7.10 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$とする．

(1) $x\neq 0$ならば$\left|(1+x)^{-1/x}-e^{-1}\right|\leq 2|x|$．

(2) $\alpha\in\mathbb{R}$とする．このとき$\left|(1+x)^{\alpha}-1\right|\leq|\alpha|2^{|\alpha|+1}|x|$．

証明 (2) $\forall y\in(-1,\infty)$, $\frac{d}{dy}(1+y)^{\alpha}=\alpha(1+y)^{\alpha-1}$なので，$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$であることと平均値の定理により$\exists\theta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,

$$\left|(1+x)^{\alpha}-1\right|=\left|\alpha(1+\theta)^{\alpha-1}x\right|\leq|\alpha|\cdot\max\{2^{\alpha-1},2^{1-\alpha}\}|x|\leq|\alpha|2^{|\alpha|+1}|x|.$$

(1) 補題7.7の(7.6)により

$$\left|-\frac{\log(1+x)}{x}+1\right| \leqq \left|-\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x}\right|+\frac{|x|}{2}$$

$$\overset{(7.6)}{\leqq} \frac{8}{3}|x|^2+\frac{1}{2}|x| \leqq \frac{4}{3}|x|+\frac{1}{2}|x| \leqq 2|x| \overset{(7.21)}{\leqq} 1$$

であるので、$\forall y\in\mathbb{R}$, $\frac{d}{dy}e^y=e^y$ に注意して平均値の定理により、$\exists\theta\in[-1,1]$,

$$|e(1+x)^{-1/x}-1| = \left|e^{1-\log(1+x)/x}-1\right|$$

$$= e^{\theta}\left|-\frac{\log(1+x)}{x}+1\right| \overset{(7.21)}{\leqq} 2e|x|,$$

よって $|(1+x)^{-1/x}-e^{-1}|\leqq 2|x|$. ■

次が本§の1つ目の主定理である。

定理7.11 $R\in(0,\infty)$ とする。このときRのみに依存して定まる $N_R\in\mathbb{N}$ と $C_R\in(0,\infty)$ が存在して次が成り立つ: $n\geqq N_R$, $\left|\frac{j}{\sqrt{n}}\right|\leqq R$ かつ $n-j$ が偶数であるような任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対し

$$\left|\frac{C_0\sqrt{n}}{2}e^{j^2/(2n)}P_n(j)-1\right|\leqq C_R\cdot\frac{|j|+1}{n} \tag{7.22}$$

記号　本§では以下、(7.22)の形の不等式が成り立つことを、$\frac{C_0\sqrt{n}}{2}e^{\frac{j^2}{2n}}P_n(j)-1=O_R\left(\frac{|j|+1}{n}\right)$ もしくは

$$P_n(j)=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-\frac{j^2}{2n}}\left(1+O_R\left(\frac{|j|+1}{n}\right)\right)$$

とも書き表す(O_Rの"R"は(7.22)のC_RがRのみに依存して定まることを表す)。以下の議論中でも記号O_Rは同様の意味で用いる。

定理7.11の証明

まず、$n\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{Z}$とし、$n-j$は偶数、かつ$|j|\leqq\frac{n}{2}$と仮定する。このとき定理7.5の(7.4)により、nが十分大きい限り

$$P_n(j)\overset{(7.20)}{=}\frac{n!}{\left(\frac{n+j}{2}\right)!\left(\frac{n-j}{2}\right)!}2^{-n}$$

$$\overset{(7.4)}{=}\frac{C_0\sqrt{n}(n/e)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot 2^{-n}}{C_0^2\sqrt{\frac{n+j}{2}}\sqrt{\frac{n-j}{2}}\left(\frac{n+j}{2e}\right)^{\frac{n+j}{2}}\left(\frac{n-j}{2e}\right)^{\frac{n-j}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}$$

$$\overset{\text{補題7.10-(2)}}{=}\frac{2}{C_0}\sqrt{\frac{n}{n^2-j^2}}\frac{n^n}{(n+j)^{\frac{n+j}{2}}(n-j)^{\frac{n-j}{2}}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1-\frac{j^2}{n^2}\right)^{-1/2}\frac{n^n}{(n^2-j^2)^{n/2}}\frac{(n-j)^{j/2}}{(n+j)^{j/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1-\frac{j^2}{n^2}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{j^2}{n^2}\right)^{-n/2}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{-j/2}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{j/2}\times\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{7.23}$$

ただし(7.23)の3つ目の等号で、nさえ十分大きければ分母中の$O\left(\frac{1}{n}\right)$は$[-1/2,1/2]$に属し、するとそのとき補題7.10-(2)により $\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}=1+O\left(\frac{1}{n}\right)$ となることを用いた。

次に$n\in\mathbb{N}$と$j\in\mathbb{Z}$は$\left|\frac{j}{\sqrt{n}}\right|\leqq R$, $n\geqq 4R^2$ (従って$\left|\frac{j}{n}\right|\leqq\frac{R}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{2}$)を満たし、かつ$n-j$は偶数であって(7.23)が成り立つ程度に$n$は十分大きいとする。

$r:=j/\sqrt{n}$とおく。(nが偶数で)$j=0$のときは(7.23)により$P_n(0)=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$となり(7.22)は成り立つので、$j\neq 0$、すなわち$r\neq 0$と仮定した上で(7.22)を示せばよい。さて、$|r|\leqq R$に注意しつつ、補題7.10を用いて(7.23)の右辺をさらに変形すると($\left|\frac{r}{\sqrt{n}}\right|\leqq\frac{R}{\sqrt{n}}\leqq\frac{1}{2}$, 従って$\frac{r^2}{n}\leqq\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$にも注意して)

$$P_n(j)\overset{(7.23)}{=}\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1-\frac{r^2}{n}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{r^2}{n}\right)^{-n/2}\left(1+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{r\sqrt{n}}{2}}\times\left(1-\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{r\sqrt{n}/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\overset{\text{補題7.10(2)}}{=}\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{r^2}{n}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\left(1-\frac{r^2}{n}\right)^{n/r^2}\right)^{-r^2/2}\times\left(\left(1+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}/r}\right)^{r^2/2}\left(\left(1-\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}/r}\right)^{r^2/2}$$

$$\overset{\text{補題7.10-(1)}}{=}\frac{2}{C_0\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1+r^2}{n}\right)\right)\left(e^{-1}(1+O(r^2/n))\right)^{-r^2/2}\times\left(e^{-1}(1+O(|r|/\sqrt{n}))\right)^{r^2/2}\left(e^{-1}(1+O(|r|/\sqrt{n}))\right)^{r^2/2}$$

$$=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-r^2/2}\left(1+O\left(\frac{1+r^2}{n}\right)\right)\left(1+O(r^2/n)\right)^{-r^2/2}\times\left(1+O(|r|/\sqrt{n})\right)^{r^2/2}\left(1+O(|r|/\sqrt{n})\right)^{r^2/2}$$

$$\overset{\text{補題7.10-(2)}}{=}\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-r^2/2}\left(1+O_R(1/n)\right)\left(1+O_R(r^2/n)\right)\times\left(1+O_R(|r|/\sqrt{n})\right)\left(1+O_R(|r|/\sqrt{n})\right)$$

$$=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-r^2/2}\left(1+O_R(1/n)+O_R(|r|/\sqrt{n})\right)$$

$$=\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-\frac{j^2}{2n}}\left(1+O_R\left(\frac{|j|+1}{n}\right)\right) \tag{7.24}$$

となり、(7.22)が得られる。ただし(7.24)の5つ目の等号を得るために補題7.10-(2)を用いる際には、前行の$O(r^2/n)$, $O(|r|/\sqrt{n})$, $O(|r|/\sqrt{n})$の項が全て$[-1/2,1/2]$に属する程度にnが十分きい必要があるが、$|r|\leqq R$であることから「nがどの程度大きければよいか」はRのみに依存する形で求めることができる。すなわち、主張のようなN_Rが存在することが分かり、定理7.11の証明が完了した。■

次に定理7.11を用いて1次元単純ランダムウォークに対する中心極限定理を証明し，また同時に $C_0=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}=\sqrt{2\pi}$ であることを示そう．まず，次を証明する．

命題7.12 (1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}\nu_n(\{x\})=0$.

(2) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n([a,b])=\frac{1}{C_0}\int_a^b e^{-x^2/2}dx. \quad\text{(7.25)}$$

(3) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall b\in(0,\infty)$, $\nu_n(\mathbb{R}\setminus(-b,b))\leqq\frac{1}{b^2}$.

証明 (1) $R:=1+|x|$ とおき，$n\in\mathbb{N}$, $n\geqq N_R$ とする．もし $\nu_n(\{x\})>0$ ならば，$\frac{j}{\sqrt{n}}=x$ かつ $P_n(j)>0$ となる $j\in\mathbb{Z}$ が存在することになるが，このとき $\left|\frac{j}{\sqrt{n}}\right|=|x|<R$ であり，また $P_n(j)>0$ と命題7.9-(1)より $n-j$ は偶数であるので，定理7.11により

$$\nu_n(\{x\})=P_n(j)=\frac{1}{C_0\sqrt{n}}e^{-\frac{j^2}{2n}}\left(1+O_R\left(\frac{|j|+1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{C_0\sqrt{n}}e^{-x^2/2}\left(1+O_R\left(\frac{1}{n}+\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right)\right). \quad\text{(7.26)}$$

よって各 $n\geqq N_R$ に対し，$\nu_n(\{x\})$ は0か(7.26)で与えられるかのいずれかなので

$$0\leqq\nu_n(\{x\})\leqq\frac{1}{C_0\sqrt{n}}\left(1+O_R\left(\frac{1}{n}+\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right)\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

となり，ゆえに $\lim_{n\to\infty}\nu_n(\{x\})=0$.

(2) $R:=|a|+|b|+1$ とおく．また $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq N_R$ とする．このとき定理7.11と命題7.9-(1)により

$$\nu_n([a,b])=\sum_{j\in\mathbb{Z}\cap[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}P_n(j)$$
$$\overset{\text{命題7.9-(1)}}{=}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\cap[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]\\ n-j\text{は偶数}}}P_n(j)$$
$$\overset{\text{定理7.11}}{=}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\cap[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]\\ n-j\text{は偶数}}}\frac{2}{C_0\sqrt{n}}e^{-\frac{j^2}{2n}}\left(1+O_R\left(\frac{|j|+1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{C_0}\underbrace{\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\cap[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]\\ n-j\text{は偶数}}}e^{-\frac{1}{2}(j/\sqrt{n})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}}_{[a,b]\text{内での分割幅}\frac{2}{\sqrt{n}}\text{の分割に対する関数}e^{-x^2/2}\text{のRiemann和}}\left(1+O_R\left(\frac{R}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{C_0}\int_a^b e^{-x^2/2}dx.$$

(3) $n\in\mathbb{N}$ とする．定義7.1の離散型確率空間 $(\Omega,\mathbb{P})$ を n に応じて適宜取り直すことにより，$n\leqq N$ と仮定して一般性を失わない．さて，このとき命題7.3-(2)とChebyshevの不等式(3.6)($p=2$)により $\forall b\in(0,\infty)$,

$$\nu_n(\mathbb{R}\setminus(-b,b))\overset{(7.19)}{=}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|\geqq b\right]=\mathbb{P}[|S_n|\geqq b\sqrt{n}]$$
$$\overset{(3.6)(p=2)}{\leqq}\frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{b^2n}\overset{\text{命題7.3-(2)}}{=}\frac{1}{b^2}. \quad ■$$

補題7.13 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

証明 まず，$\forall x\in\mathbb{R}$, $0<e^{-x^2/2}\leqq\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}$ であり，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\sqrt{2}\left(\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'dx$$
$$=\lim_{b\to\infty}\sqrt{2}\left(\mathrm{Arctan}\frac{b}{\sqrt{2}}-\mathrm{Arctan}\frac{-b}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\pi<\infty$$

であるので，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx$ は収束することに注意する．従って，広義2重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{[-n,n]^2}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-y^2/2}dxdy$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n}e^{-x^2/2}dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\right)^2 \quad\text{(7.27)}$$

も収束している．ところが一方，極座標変換により

$$\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqq n^2\}}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\int_0^{2\pi}e^{-r^2/2}r\,d\theta dr=\lim_{n\to\infty}\left[-2\pi e^{-r^2/2}\right]_0^n$$
$$=2\pi \quad\text{(7.28)}$$

となるので，(7.27)(7.28)より $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$. ■

定理7.14 $C_0=\sqrt{2\pi}$.

証明 $b\in(0,\infty)$ と $n\in\mathbb{N}$ を任意に取る．命題7.12-(3)より $0\leqq1-\nu_n([-b,b])=\nu_n(\mathbb{R}\setminus[-b,b])$

$$\overset{\text{命題7.12-(3)}}{\leqq}\nu_n(\mathbb{R}\setminus(-b,b))\leqq\frac{1}{b^2}$$

であるので，命題7.12-(2)を用いて $n\to\infty$ とすることにより $0\leqq1-\frac{1}{C_0}\int_{-b}^{b}e^{-x^2/2}dx\leqq\frac{1}{b^2}$,

そこでさらに $b\to\infty$ として補題7.13を用いることにより，$0\leqq1-\frac{1}{C_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\leqq0$，すなわち

$$C_0=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\overset{\text{補題7.13}}{=}\sqrt{2\pi}$$ を得る． ■

定理7.5，命題7.12，定理7.14をまとめて，以下の通り本§の2つ目，3つ目の主定理を得る．

定理7.15（Stirling（スターリング）の公式）

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad\text{(7.29)}$$

特に $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}=1$.

証明 定理7.5と定理7.14より直ちに従う． ■

定理7.16(1次元単純ランダムウォークに対する中心極限定理)
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}\nu_n((-\infty,x])=\lim_{n\to\infty}\nu_n((-\infty,x))$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy \cdots(7.30)$$

証明 $x\in\mathbb{R}$とし, $\varepsilon\in(0,\infty)$を任意に取る. このとき, $\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$は収束する広義積分であるので,
$a\in(-\infty,\min\{x,-\sqrt{3/\varepsilon}\})$を

$$\left|\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy-\int_{a}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|<\sqrt{2\pi}\frac{\varepsilon}{3}\cdots(7.31)$$

となるように取ることができる. すると命題7.12-(2)により, $\exists N_2\in\mathbb{N}, \forall n\geqq N_2$,

$$\left|\nu_n([a,x])-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\cdots(7.32)$$

一方, $a<-\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$より $a^2>\frac{3}{\varepsilon}$なので, 命題7.12-(3)より $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$0\leqq\nu_n((-\infty,x])-\nu_n([a,x])=\nu_n((-\infty,a))$$
$$\leqq\nu_n(\mathbb{R}\setminus(-|a|,|a|))\leqq\frac{1}{a^2}<\frac{\varepsilon}{3}.\cdots(7.33)$$

(7.31), (7.32), (7.33)より, $\forall n\geqq N_2$,

$$\left|\nu_n((-\infty,x])-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|$$
$$\leqq\left|\nu_n((-\infty,x])-\nu_n([a,x])\right|$$
$$+\left|\nu_n([a,x])-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|$$
$$+\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{x}e^{-y^2/2}dy-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

となるので, $\lim_{n\to\infty}\nu_n((-\infty,x])=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$.
さらにこれと命題7.12-(1)より, $n\in\mathbb{N}$とすると

$$\nu_n((-\infty,x))=\nu_n((-\infty,x])-\nu_n(\{x\})$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy-0$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$$

となるので, (7.30)が成り立つ. ■