第 1 回レポート（演習問題 1）
締め切り：2019 年 11 月 5 日（火）13:15
提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 1.1〜1.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．

以下の問題において，$(\Omega, \mathbb{P})$ を（任意に与えられた）離散型確率空間とする．

問題 1.1. $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^\Omega$ を Ω の分割で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{P}[\Omega_\lambda] > 0$ を満たすものとし，また $A \subset \Omega$ とする．
(1) $\mathbb{P}[A] = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{P}[A \mid \Omega_\lambda]\mathbb{P}[\Omega_\lambda]$ であることを示せ．
(2)（Bayes の定理）$\mathbb{P}[A] > 0$ と仮定する．このとき任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し次が成り立つことを示せ：

$$\mathbb{P}[\Omega_{\lambda_0} \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid \Omega_{\lambda_0}]\mathbb{P}[\Omega_{\lambda_0}]}{\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{P}[A \mid \Omega_\lambda]\mathbb{P}[\Omega_\lambda]}.$$

問題 1.2. 次の (1)〜(3) の各場合について，実確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathrm{var}(X)$ および**モーメント母関数** $\mathbb{E}[e^{sX}]$ を求めよ．ただし $s \in (-\infty, 0]$ とする．

(1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0, 1]$ の二項分布 $B(n, p)$ のとき．

(2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0, \infty)$ の Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき．

(3) X の分布が確率 $\alpha \in [0, 1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ のとき．

問題 1.3. (1) $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $\mathbb{N} \cup \{0\}$-値確率変数でその分布は確率 $\alpha \in (0, 1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ であるとする．このとき任意の $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し次が成り立つことを示せ：

$$\mathbb{P}[X - n = k \mid X \geq n] = \mathbb{P}[X = k]. \tag{4.1}$$

(2) $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ を $\mathbb{P}[X \geq 0] > 0$ を満たす $\mathbb{Z}$-値確率変数とし，さらに $\mathbb{P}[X \geq n] > 0$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し (4.1) が成り立つと仮定する．このとき $\alpha \in [0, 1)$ が存在して X の分布 $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ は確率 α の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ に等しいことを示せ．（ヒント：$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ を $a_n := \mathbb{P}[X \geq n]$ で定義し，まず任意の $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し (4.1) より $a_{n+k} = a_n a_k$ が従うことを示せ．）