

第 2 回レポート (演習問題 2)

締め切り: 2019 年 11 月 14 日 (木) 17:00

提出先: 数学専攻事務室 (理学部 B 棟 4 階 B410 号室)

以下の問題 2.1~2.3 に可能な限り多く解答し, レポートとして提出すること.

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 数学的に厳密な議論を行うこと. 厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない.
- 数学的内容の理解の為に他者と相談するのは構わないが, レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず, 自分の言葉で解答すること.

以下の問題において, (Ω, \mathbb{P}) を (任意に与えられた) 離散型確率空間とする.**問題 2.1.** $n \in \mathbb{N}$ とし, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset 2^\Omega$ とする. このとき次の 2 条件は同値であることを示せ:

- (1) $\{A_j\}_{j=1}^n$ は独立: 各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $B_j \in \{A_j, \Omega \setminus A_j\}$ ならば, $\mathbb{P}[\bigcap_{j=1}^n B_j] = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}[B_j]$.
- (2) 任意の空でない $J \subset \{1, \dots, n\}$ に対し $\mathbb{P}[\bigcap_{j \in J} A_j] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$.

問題 2.2. $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\mathbb{N} \cup \{0\}$ -値確率変数とし, $\{X, Y\}$ は独立, かつ X と Y の分布はともに確率 $\alpha \in [0, 1)$ の幾何分布 $\text{Geom}(\alpha)$ であるとする: $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P} \circ Y^{-1} = \text{Geom}(\alpha)$. また $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, s \in (-\infty, 0]$ とする. このとき次の確率および期待値を求めよ:

$$(1) \mathbb{P}[\min\{X, Y\} \leq k] \quad (2) \mathbb{P}[X < Y] \quad (3) \mathbb{P}[X = Y] \quad (4) \mathbb{E}[e^{s(X+Y)}]$$

問題 2.3. (1) $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\mathbb{N} \cup \{0\}$ -値確率変数とし, $\{X, Y\}$ は独立, かつ $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ で X の分布は $\text{Po}(\lambda_1)$, Y の分布は $\text{Po}(\lambda_2)$ であるとする. このとき $X + Y$ の分布を求めよ.(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, 各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $X_j: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $\mathbb{N} \cup \{0\}$ -値確率変数, $\lambda_j \in (0, \infty)$ で X_j の分布は $\text{Po}(\lambda_j)$ とし, さらに $\{X_j\}_{j=1}^n$ は独立とする. このとき $\sum_{j=1}^n X_j$ の分布を求めよ.