演習問題 1（2019 年 12 月 3 日）

注意．本演習問題は，レポート課題ではありません．

問題 1.1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，S を集合，$f : X \to S$ とし，$\mathcal{A}_f \subset 2^S$ を

$$\mathcal{A}_f := \{A \subset S \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$$

で定める．このとき $\mathcal{A}_f$ は S の σ-加法族であることを示せ．

問題 1.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ とする．
(1) $B_1 := A_1$ とし，各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ とする．このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

であることを示せ．
(2) 次の不等式が成り立つことを示せ（この性質を測度 μ の**（可算）劣加法性**という）：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

問題 1.3 (講義中の命題 1.9 の証明)**.** $d \in \mathbb{N}$ とし，$\mathcal{F}_d, \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ を次で定める：

$$\mathcal{F}_d := \left\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \,\middle|\, \text{各 } k \in \{1, \ldots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ かつ } a_k \leq b_k\right\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} := \left\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \,\middle|\, \text{各 } k \in \{1, \ldots, d\} \text{ に対し } a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ かつ } a_k \leq b_k\right\} \cup \{\emptyset\}.$$

このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{F}_d) = \sigma\left(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\right)$ であることを，次の問に順次答えることにより証明せよ．
(1) $\sigma\left(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\right) \subset \sigma(\mathcal{F}_d)$ であることを示せ．
(2) $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示し，さらに $\sigma(\mathcal{F}_d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であることを示せ．
(3) U を $\mathbb{R}^d$ の開集合とし，$\mathcal{F}_U := \left\{I \in \mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}} \,\middle|\, I \subset U\right\}$ とおく．$U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_U} I$ であることを示せ．
(4) $\left\{U \subset \mathbb{R}^d \,\middle|\, U \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ の開集合}\right\} \subset \sigma\left(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\right)$ を示し，さらに $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma\left(\mathcal{F}_d^{\mathbb{Q}}\right)$ であることを示せ．