# 第 1 回レポート（演習問題 2）
# 締め切り：**2020 年 1 月 7 日（火）13:15**
# 提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 2.1〜2.3 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

**注意.** レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．

**問題 2.1.** $X$ を可算集合，$\varphi : X \to [0,\infty]$ とし，$\mu_\varphi : 2^X \to [0,\infty]$ を次で定める：

$$\mu_\varphi(A) := \sum_{x\in A} \varphi(x) = \sum_{x\in X} \varphi(x)\mathbf{1}_A(x), \quad A \subset X \qquad （ただし\ A = \emptyset\ のときは\ \textstyle\sum_{x\in\emptyset}\varphi(x) := 0）.$$

(1) **（易）**任意の $f : X \to [-\infty,\infty]$ は $2^X$-可測であることを示せ．

(2) $f : X \to [0,\infty]$ とする．$\displaystyle\int_X f\,d\mu_\varphi = \sum_{x\in X} f(x)\varphi(x)$ が成り立つことを示せ．

((2) のヒント：$X$ が有限のときは $f$ を $f = \sum_{x\in X} f(x)\mathbf{1}_{\{x\}}$ と有限和の形に書けることから従う．$X$ が可算無限のときは，全単射 $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ を取って $f$ を $f_n := \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathbf{1}_{\{x_k\}}$ で定まる非負関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で近似し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\int_X f_n\,d\mu_\varphi$ を求めた後で単調収束定理を用いよ.)

**問題 2.2.** 次の (1)〜(3) の各場合について，実確率変数 $X$ の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathrm{var}(X)$ を求めよ．

(1) $X$ の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0,1]$ の二項分布 $B(n,p)$ のとき．

(2) $X$ の分布がパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ の Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき．

(3) $X$ の分布がパラメータ $\alpha \in [0,1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ のとき．

**問題 2.3.** 次の (1)〜(4) の各場合について，実確率変数 $X$ の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathrm{var}(X)$ を求めよ．

(1) $X$ の分布が $[a,b]$ 上の一様分布 $\mathrm{Unif}(a,b)$ のとき $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$.

(2) $X$ の分布がパラメータ $\alpha \in (0,\infty)$ の指数分布 $\mathrm{Exp}(\alpha)$ のとき．

(3) $X$ の分布がパラメータ $\alpha,\beta \in (0,\infty)$ のガンマ分布 $\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$ のとき．

(4) $X$ の分布が（Lebesgue 測度に関して）密度 $\rho_X(x) = \bigl(1 - |1-x|\bigr)^+$ を持つとき．