第 2 回レポート（演習問題 3）
締め切り：**2020 年 1 月 20 日（月）13:15**
提出先：数学専攻事務室（理学部 B 棟 4 階 B410 号室）

以下の問題 3.1〜3.2 に可能な限り多く解答し，レポートとして提出すること．

注意. レポート作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．
- 数学的内容の理解の為に他者と相談をするのは構わないが，レポートの作成にあたっては他者の解答を写したりせず，自分の言葉で解答すること．

問題 3.1. X, Y を実確率変数とし，$\{X, Y\}$ は独立，かつ $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ であるとする．このとき次の期待値を求めよ．

(1) $\mathbb{E}[\max\{X,Y\}]$　(2) $\mathbb{E}[\min\{X,Y\}]$　(3) $\mathbb{E}[\max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\}]$　(4) $\mathbb{E}\big[X^2 Y e^{-XY^2}\big]$

問題 3.2. X を実確率変数とし，その**特性関数** $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}], \qquad t \in \mathbb{R}$$

（ただし i は虚数単位を表すものとする）．このとき任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つことを示せ．

(1) X の分布が大きさ $n \in \mathbb{N}$, 確率 $p \in [0,1]$ の二項分布 $B(n,p)$ のとき，

$$\varphi_X(t) = \big(1 + p(e^{it} - 1)\big)^n.$$

(2) X の分布がパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ の Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ のとき，

$$\varphi_X(t) = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big).$$

(3) X の分布がパラメータ $\alpha \in [0,1)$ の幾何分布 $\mathrm{Geom}(\alpha)$ のとき，

$$\varphi_X(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{it}}.$$

(4) X の分布が $[-a,a]$ 上の一様分布 $\mathrm{Unif}(-a,a)$ のとき ($a \in (0,\infty)$),

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin at}{at} \qquad \left(\text{ただし } \frac{\sin 0}{0} := 1 \text{ と定める}\right).$$

(5) X の分布が（Lebesgue 測度に関して）密度 $\rho_X(x) = \frac{1}{4}(2 - |x|)^+$ を持つとき，

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \qquad \left(\text{ただし } \frac{\sin 0}{0} := 1 \text{ と定める}\right).$$

注意. 問題 3.2 の解答に際しては，複素数値関数の積分に関する次の定義と事実に注意すること（講義ノートの 8.0 節も合わせて参照されたい）：

(1) $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$f : X \to \mathbb{C}$ とする．f の実部 $\mathrm{Re}(f)$ と虚部 $\mathrm{Im}(f)$ が共に（$\mathbb{R}$-値関数として）$\mathcal{M}$-可測であるとき，f は（$\mathbb{C}$-値関数として）$\mathcal{M}$-可測であるという．

(2) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$f : X \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{M}$-可測とする．$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ であるとき f は μ-可積分であるといい，そのとき $\int_X f\,d\mu := \int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu$ と定める．

(3) X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実確率変数とし，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は有界で $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測とする．このとき $f(X) := f \circ X : \Omega \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{F}$-可測で，講義中の**定理 2.10-(2) の等式** $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ **が成り立つ**．さらに X の分布が定理 2.11-(1) もしくは命題 2.14-(1) の形の測度であるとき，$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ **に定理 2.11-(2), 命題 2.14-(2) の等式が適用でき**，かつ後者の等式中の級数は絶対収束する．そこで $f(x) = e^{itx}$ の場合を考えることで $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ が計算できる．