解析学序論II　講義ノート

梶野　直孝

神戸大学理学部数学科

§1 上限・下限 (sup, inf)

Def 1.1 $A\subset\mathbb{R}$ とする.
A: 上(下)に有界 $\overset{def}{\iff}$ $\exists b\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\ \substack{\leqq\\ \geqq}\ b.$ ----(1.1)

A:上に有界　　($\forall b\in\mathbb{R}, \exists a\in A, b<a.$)

(1.1)のような b を A の上(下)界という.

Def 1.2 $A\subset\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ とする.
b: Aの最大(小)値 $\overset{def}{\iff}$ $\begin{cases}\text{(i)}\ b\in A\\ \text{(ii)}\ \forall a\in A,\ a\ \substack{\leqq\\ \geqq}\ b.\end{cases}$
$\left(b=\substack{\max\\ \min}A\right)$

Prop 1.3 $A\subset\mathbb{R}$ とする.このとき A の最大(小)値は存在すれば唯1つに定まる(「一意的である」「uniqueである」とも言う).

(証) b, c が A の最大値であるとすると, Def 1.2-(i)より $b, c\in A$, 従って b に対しての Def 1.2-(ii) から $c\leqq b$, また c に対する Def 1.2-(ii) から $b\leqq c$.
$\therefore b=c$. 最小値についても同様. ■

Def 1.4 $A\subset\mathbb{R}$ とする. 集合 $\{b\in\mathbb{R}\mid b$ は A の上(下)界$\}$ に最小(大)値が存在するとき, その値を A の上(下)限(最小上界(最大下界))といい, これを $\substack{\sup\\ \inf}A$ と書き表す.

Prop 1.5 $A\subset\mathbb{R}$ とする. $\substack{\max\\ \min}A$ が存在すれば $\substack{\max\\ \min}A=\substack{\sup\\ \inf}A$.

(証) $\max A$ が存在すると仮定し $b:=\max A$ とおく.
(注:「$X:=Y$」は「XをYで定義する」の意.)
すると $b\in A\subset\mathbb{R}$ より $b\in\mathbb{R}$ であり, また $\forall a\in A$, $a\leqq b$ である.
すなわち b は A の上界である. ①
他方, c を A の上界とすると $b\in A$ なので $b\leqq c$. ②
①, ② より $b=\sup A$. 最小値についても同様. ■

例 1.6 $A:=\left\{1+\frac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ とする ($\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す).
このとき $\sup A=2$, $\inf A=1$ である. 実際,
$2=1+\frac{1}{1}\in A$ であり, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+\frac{1}{n}\leqq 1+1=2$ なので
$2=\max A\underset{\text{Prop1.5}}{=}\sup A$. また, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+\frac{1}{n}>1$ なので
1はAの下界である. 次に b を A の下界とするとき,
$b>1$ と仮定すると $n>\frac{1}{b-1}$ なる $n\in\mathbb{N}$ に対し
$\frac{1}{n}<b-1$, $1+\frac{1}{n}<b$ となり, b が A の下界であることに反する. よって $b\leqq 1$ であり, 従って $\inf A=1$.
(注 $\min A$ は存在しない.)

$\mathbb{R}$ の極めて重要な性質として, 次が成り立つ.

Thm 1.7 (実数の連続性の「公理」) $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\phi$ とする.
A が上(下)に有界ならば $\substack{\sup\\ \inf}A$ が存在する.

(注: Thm 1.7は有理数の全体 $\mathbb{Q}$ においては成り立たない!)
Thm 1.7 は微分積分学(のみならず, 現代数学)の根幹!

応用例:

Prop 1.8 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とし, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\ \substack{\leqq\\ \geqq}\ a_{n+1}$ と仮定する.
このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上(下)に有界ならば $\lim_{n\to\infty}a_n=\substack{\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n\\ \inf_{n\in\mathbb{N}}a_n}$.

(証) $a_n\leqq a_{n+1}$, 上に有界の場合を示す.
(他方の主張も同様にして示される.)
$a:=\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n$ とおく. $\varepsilon>0$ とする.
$a-\varepsilon<a$ であるので, $a=\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n$ の最小性から,
$a-\varepsilon$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界ではない, すなわち
$\exists N\in\mathbb{N}$, $a_N>a-\varepsilon$. すると $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の非減少性と
a が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界であることから,
$\forall n\geqq N$, $a-\varepsilon<a_N\leqq a_n\leqq a<a+\varepsilon$.
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=a$. ■

演習 1.1 $A:=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ とおく.
$\sup A$, $\inf A$ の値を求め, またそれを証明せよ.

演習 1.2 $B:=\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ とおく.
$\sup B$, $\inf B$ の値を求め, またそれを証明せよ.

演習 1.3 $C:=\left\{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ とおく.
$\sup C$, $\inf C$ の値を求め, またそれを証明せよ.

§2 上極限・下極限($\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$)

☆ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ の $n\to\infty$ のときの挙動をどう調べる？
困難な点：極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ は存在するとは限らない！

今日の話： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ に代わるある値が，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界(つまり上下両方に有界)である限り常に定義でき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ の存在を調べたりするのに有用！

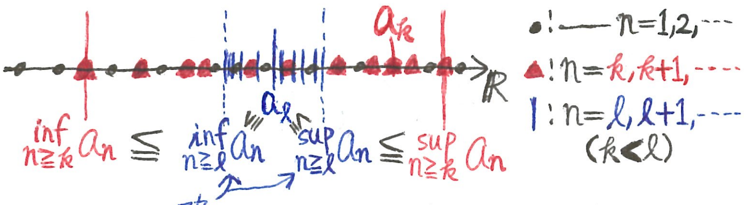
Def 2.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ は有界とする．このとき次の実数
$$\limsup_{n\to\infty}a_n := \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n}a_k\right),\quad \liminf_{n\to\infty}a_n := \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n}a_k\right)$$
をそれぞれ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限，下極限という．

(注 $\{\sup\limits_{k\geq n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界，$\{\inf\limits_{k\geq n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界．
実際 $\sup\limits_{k\geq n}a_k \geq a_n \geq \inf\limits_{m\geq 1}a_m$，$\inf\limits_{k\geq n}a_k \leq a_n \leq \sup\limits_{m\geq 1}a_m$．)

Lemma 2.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ は有界とする．
(1) $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geq n}a_k\right)$，$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{k\geq n}a_k\right)$．
(2) $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty}a_n$．

☺ (1) $n\in\mathbb{N}$ とすると，$\forall k\geq n+1$ に対し，$k\geq n$ なので
$$\inf_{l\geq n}a_l \leq a_k \leq \sup_{l\geq n}a_l.$$
よって $\sup\limits_{l\geq n}a_l$，$\inf\limits_{l\geq n}a_l$ は $\{a_k\}_{k\geq n+1}$ に対する上界，下界であるので，上限，下限をとれば $\sup\limits_{k\geq n+1}a_k \leq \sup\limits_{l\geq n}a_l$，$\inf\limits_{k\geq n+1}a_k \geq \inf\limits_{l\geq n}a_l$．
つまり $\{\sup\limits_{k\geq n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は非増加，$\{\inf\limits_{k\geq n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は非減少なので，Prop 1.8 より主張が従う．

(2) $m,n\in\mathbb{N}$ とすると，
$$\inf_{k\geq m}a_k \leq a_{\max\{m,n\}} \leq \sup_{k\geq n}a_k$$
なので $\inf\limits_{k\geq m}a_k$ は $\{\sup\limits_{k\geq n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$ の下界であり，従って
$$\inf_{k\geq m}a_k \leq \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n}a_k\right) = \limsup_{n\to\infty}a_n.$$
すると今度は $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$ が $\{\inf\limits_{k\geq m}a_k\}_{m=1}^{\infty}$ の上界であるということになるので，$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n = \sup\limits_{m\geq 1}\left(\inf\limits_{k\geq m}a_k\right) \leq \limsup\limits_{n\to\infty}a_n$． ■



この左右の壁が同じ値に収束するときが，すなわち
極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が　するとき，である：

Prop 2.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする．このとき
$\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ (つまり $\exists a\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$)
$\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界で $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n = \liminf\limits_{n\to\infty}a_n$．
また，このとき $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \limsup\limits_{n\to\infty}a_n = \liminf\limits_{n\to\infty}a_n$．

☺ ($\Longrightarrow$) $a:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ とおく．極限の定義から $\exists N_1\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N_1$，$|a_n-a|<1$ すなわち $a-1<a_n<a+1$．
よって $\forall n\in\mathbb{N}$，$\min\{a-1,a_1,\cdots,a_{N_1}\}\leq a_n\leq\max\{a+1,a_1,\cdots,a_{N_1}\}$
となるので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界．さらに $\varepsilon>0$ とすると，
$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$|a_n-a|<\varepsilon$ すなわち $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$
となるので $n\geq N$ に関する上限，下限をとれば
$$a-\varepsilon\leq\inf_{n\geq N}a_n\leq\liminf_{n\to\infty}a_n \underset{(\text{Lem2.2-(2)})}{\leq} \limsup_{n\to\infty}a_n\leq\sup_{n\geq N}a_n\leq a+\varepsilon.$$
$\therefore\ |\limsup\limits_{n\to\infty}a_n-a|\leq\varepsilon$，$|\liminf\limits_{n\to\infty}a_n-a|\leq\varepsilon$．
$\varepsilon>0$ は任意なので $|\limsup\limits_{n\to\infty}a_n-a|=|\liminf\limits_{n\to\infty}a_n-a|=0$
となり，よって $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$．

($\Longleftarrow$) $a:=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$ とおく．$\varepsilon>0$ とすると
上極限の定義から $\exists N_1\in\mathbb{N}$，$\sup\limits_{k\geq N_1}a_k<a+\varepsilon$，
$\exists N_2\in\mathbb{N}$，$a-\varepsilon<\inf\limits_{k\geq N_2}a_k$．
そこで $\forall n\geq\max\{N_1,N_2\}$，
$$a-\varepsilon<\inf_{k\geq N_2}a_k\leq a_n\leq\sup_{k\geq N_1}a_k<a+\varepsilon,$$
従って $|a_n-a|<\varepsilon$．$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$． ■

Prop 2.4 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ は有界とし，
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leq b_n$$
と仮定する．このとき
$$\limsup_{n\to\infty}a_n\leq\limsup_{n\to\infty}b_n,\quad \liminf_{n\to\infty}a_n\leq\liminf_{n\to\infty}b_n.$$

☺ $n\in\mathbb{N}$ とすると，$\forall k\geq n$，$a_k\leq b_k\leq\sup\limits_{l\geq n}b_l$．
よって $\sup\limits_{l\geq n}b_l$ は $\{a_k\}_{k\geq n}$ に対する上界になっているので $\sup\limits_{k\geq n}a_k\leq\sup\limits_{l\geq n}b_l$．ところが $\limsup\limits_{m\to\infty}a_m\leq\sup\limits_{k\geq n}a_k$ なので $\limsup\limits_{m\to\infty}a_m\leq\sup\limits_{l\geq n}b_l$ となり，$n\in\mathbb{N}$ は任意なのでこれは $\limsup\limits_{m\to\infty}a_m$ が $\{\sup\limits_{l\geq n}b_l\}_{n\geq 1}$ に対する下界であることを意味する．
$\therefore\ \limsup\limits_{m\to\infty}a_m\leq\inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_{l\geq n}b_l\right)=\limsup\limits_{n\to\infty}b_n$．$\liminf\limits_{n\to\infty}$ についても同様． ■

演習2.1 $a_n:=(-1)^n$ とするとき $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$，$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．
演習2.2 $b_n:=\sin\frac{2n\pi}{3}$ とするとき $\limsup\limits_{n\to\infty}b_n$，$\liminf\limits_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．
演習2.3 $c_n:=\cos\left\{\left(\frac{2}{3}n+\frac{(-1)^n}{n}\right)\pi\right\}$ とするとき $\limsup\limits_{n\to\infty}c_n$，$\liminf\limits_{n\to\infty}c_n$ を求めよ．

§3 集積値と上極限・下極限

Def 3.1 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ とする. ある狭義単調増加な自然数の列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ により
$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$$
の形に表される数列を, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列という.

例 3.2 次は $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ の部分列:
(i) $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ (ii) $\{a_{2n}\}_{n=1}^\infty$ (iii) $\{a_{3n}\}_{n=1}^\infty$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ が収束しない場合でも, その部分列は収束する場合がある (もちろん, 収束しない場合もある).

例 3.3 $a_n := (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (cf. 演習1.2) とする.
(i) $\{a_{2n}\}_{n=1}^\infty$ は収束: $a_{2n} = 1-\frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
(ii) $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ は収束: $a_{2n-1} = -1+\frac{1}{2n-1} \xrightarrow{n\to\infty} -1$.
(iii) $\{a_{3n}\}_{n=1}^\infty$ は収束しない (演習3.3)

Def 3.4 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ とする.
$a \in \mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$: $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Thm 3.5 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界とする. このとき $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の最大, 最小の集積値.

∵ $\limsup_{n\to\infty} a_n$ について示す. ($\liminf_{n\to\infty} a_n$ についても同様)
$a := \limsup_{n\to\infty} a_n$ とおく.

claim1 $b \in \mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値 $\Rightarrow b \leq a$.
∵ $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$ となる $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ をとる. このとき Prop 2.3 より
$$b = \limsup_{k\to\infty} a_{n_k} = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{\ell\geq k} a_{n_\ell}\right).$$
そこで $k \in \mathbb{N}$ とすると $b \leq \sup_{\ell\geq k} a_{n_\ell}$ であるが, さらに $\forall \ell \geq k$ に対し $n_\ell \in \mathbb{N}$, $n_\ell \geq n_k \geq k$ より $a_{n_\ell} \leq \sup_{m\geq k} a_m$
$\therefore b \leq \sup_{\ell\geq k} a_{n_\ell} \leq \sup_{m\geq k} a_m$
となり, $k \in \mathbb{N}$ は任意だったので
$$b \leq \inf_{k\geq 1} \sup_{m\geq k} a_m = \limsup_{n\to\infty} a_n = a. \quad /\!/ \text{(claim1)}$$

claim2 $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n$, $a-\varepsilon < a_k < a+\varepsilon$.

∵ $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ とする. $a+\varepsilon > a = \inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq m} a_k$ より, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\sup_{k\geq m} a_k < a+\varepsilon$. そこで $N := \max\{n, m\}$ とおくと $N \geq m$ より
$$\sup_{k\geq N} a_k \leq \sup_{k\geq m} a_k < a+\varepsilon. \text{ ------ ①}$$
一方, $a-\varepsilon < a = \inf_{\ell\geq 1} \sup_{k\geq \ell} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k$ なので,
$$\exists k \geq N,\ a-\varepsilon < a_k \leq \sup_{\ell\geq N} a_\ell. \text{ ------ ②}$$
①, ② より, ② の k に対し $a-\varepsilon < a_k < a+\varepsilon$ であり, また $k \geq N \geq n$ より $k \geq n$. //(claim2)

claim3 $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$: $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
∵ $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を帰納的に次で定める:
▷ $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid a-1 < a_n < a+1\}$,
▷ $n_{k+1} := \min\{n \geq n_k+1 \mid a-\frac{1}{k+1} < a_n < a+\frac{1}{k+1}\}$.
(claim2 より, 右辺の集合は ϕ でない)
$\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} n_{k+1} \geq n_k+1 > n_k, \text{ かつ} \\ a-\frac{1}{k} < a_{n_k} < a+\frac{1}{k}. \end{cases}$
$\therefore \{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. //(claim3)

claim1, claim3 より a は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の最大の集積値. ∎

系 3.6 (Bolzano-Weierstrass の定理)
有界な $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は収束する部分列を持つ.

系 3.7 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ とする. このとき
$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界, かつ集積値を1つしか持たない.
∵ ($\Longrightarrow$) Prop 2.3 より $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界. また $a \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値とすると Thm 3.5 と Prop 2.3 より
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
$\therefore a = \limsup_{n\to\infty} a_n$. よって $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値は唯1つ.
($\Longleftarrow$) Thm 3.5 より $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値なので仮定により等しく, よって Prop 2.3 より $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. ∎

演習 3.1 $a_n := (-1)^n$ とするとき, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列で $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ に収束するものを1つずつ求めよ.
演習 3.2 $b_n := \sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ とするとき, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ の収束する部分列でその極限が $\limsup_{n\to\infty} b_n$ でも $\liminf_{n\to\infty} b_n$ でもないものを1つ求めよ.
演習 3.3 $\{(-1)^{3n}(1-1/(3n))\}_{n=1}^\infty$ は収束しないことを示せ.

演習4.6 (1) $p\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ に対し $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k^p}\leqq 2^{(1-p)n}$ であることを示せ.

(2) $p>1$ のとき級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ が収束することを示せ.

演習4.4 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束しないことを定義に基づいて示せ.

演習4.5 $\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列でないことを定義に基づいて示せ.

§4 Cauchy列とその収束性

Def4.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ が Cauchy列

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geqq N, |a_n-a_m|<\varepsilon.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の情報だけで書けている!

Prop4.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする. $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列である.(「収束する実数列はCauchy列である.」)

(証) $a:=\lim_{n\to\infty}a_n$ とおく. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することの定義から, $\varepsilon>0$ とすると, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqq N, |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$

すると $\forall n,m\geqq N, |a_n-a_m|\underset{\text{3角不等式}}{\leqq}|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列. ■

例4.3 演習3.3の数列 $\left\{(-1)^{3n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列ではない(従ってProp4.2の対偶により,収束しない). 実際,どんな $N\in\mathbb{N}$ に対しても, $n\geqq N$ なる偶数 n をとれば, $3n$ は偶数, $3(n+1)$ は奇数で $\frac{1}{3(n+1)}<\frac{1}{3n}\leqq\frac{1}{6}$ なので

$$\left|(-1)^{3n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)-(-1)^{3(n+1)}\left(1-\frac{1}{3(n+1)}\right)\right|=2-\frac{1}{3n}-\frac{1}{3(n+1)}>2-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{3}>0$$

となり, $\varepsilon:=\frac{5}{3}>0$ に対しCauchy列の定義の条件が不成立.

Prop4.2の逆が重要である:

Thm4.4 (Cauchyの収束条件定理) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列ならば $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$.(「($\mathbb{R}$においては)Cauchy列は収束する.」)

Thm4.4の証明のため,まず次の補題を準備する.

Lemma4.5 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列ならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

(証) $\varepsilon:=1$ に対してCauchy列の定義の条件から, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m\geqq N, |a_n-a_m|<1$. 特に $\forall n\geqq N$,

$$|a_n|\leqq|a_n-a_N|+|a_N|<|a_N|+1. \quad\cdots\cdots(4.1)$$

そこで $M:=\max\{|a_N|+1, |a_1|, \cdots, |a_N|\}$ とおけば(4.1)とMの定義より,任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し

- $n\geqq N$ ならば $|a_n|<|a_N|+1\leqq M$,
- $n\leqq N$ ならば $|a_n|\leqq\max\{|a_1|,\cdots,|a_N|\}\leqq M$,

よって $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\leqq M$ となり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界. ■

Thm4.4の証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ はCauchy列であるとする. Lemma4.5により $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界なので, Prop2.3より, $\exists\limsup_{n\to\infty}a_n, \liminf_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$. よって $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ を得るには

$$\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n\quad\cdots\cdots(4.2)$$

を示せばよい. そのために, $\varepsilon>0$ を任意にとる. Cauchy列の定義の条件から, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqq N$,

$$|a_n-a_N|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ すなわち } a_N-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a_N+\frac{\varepsilon}{2}\cdots(4.3)$$

(4.3)の後者の不等式は $\forall n\geqq N$ で成り立つので, $\sup_{n\geqq N}$, $\inf_{n\geqq N}$ をとって

$$a_N-\frac{\varepsilon}{2}\leqq\inf_{n\geqq N}a_n\leqq\liminf_{n\to\infty}a_n\underset{\text{Lemma2.2-(2)より}}{\leqq}\limsup_{n\to\infty}a_n\leqq\sup_{n\geqq N}a_n\leqq a_N+\frac{\varepsilon}{2},$$

従って

$$0\leqq\limsup_{n\to\infty}a_n-\liminf_{n\to\infty}a_n\leqq\left(a_N+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(a_N-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon. \quad(4.4)$$

$\varepsilon>0$ は任意なので $\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n$

($\limsup_{n\to\infty}a_n\neq\liminf_{n\to\infty}a_n$ と仮定すると, $\varepsilon:=\frac{1}{2}(\limsup_{n\to\infty}a_n-\liminf_{n\to\infty}a_n)$ とおけば(4.4)より $2\varepsilon\leqq\varepsilon$, よって $\varepsilon\leqq0<\varepsilon$ となり矛盾が生じる.)

よって Prop2.3 により $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$. ■

Thm4.4の応用例として,次を証明しよう.

Thm4.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とし,級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する,すなわち極限 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|:=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\in\mathbb{R}$ が存在すると仮定する. このとき極限 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$ も存在する.(「絶対収束する級数は収束する.」)

(証) $N\in\mathbb{N}$ に対し $S_N:=\sum_{n=1}^{N}a_n$, $T_N:=\sum_{n=1}^{N}|a_n|$ とおく. $\{T_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は収束する実数列なので Prop4.2 によりCauchy列. そこで $\varepsilon>0$ とすると, $\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geqq L$,

$$\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|=T_M-T_N<\varepsilon. \quad\cdots\cdots(4.5)$$

ところが3角不等式により, $\left|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\right|\leqq\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|$ であるので, (4.5)と合わせると $\forall M>\forall N\geqq L$,

$$|S_M-S_N|=\left|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\right|\leqq\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|<\varepsilon$$

となる. よって $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ はCauchy列,であり,ゆえにThm4.4より $\exists\lim_{N\to\infty}S_N=\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$. ■

注意4.7 $\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\in\mathbb{R}\iff\left\{\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right\}_{N=1}^{\infty}$ は上に有界.

((証) $(\Rightarrow)$ は Prop2.3 より分かる. $(\Leftarrow)$ は, $|a_n|\geqq0$ より $\forall N\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N}|a_n|\leqq\sum_{n=1}^{N+1}|a_n|$ であることとProp1.8より分かる.)

演習4.1 「この教室のどの学生にも兄がいる」の否定を述べよ.

演習4.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列でないとはどういうことか述べよ.

演習4.3 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\cos\left(\frac{2}{3}n\pi+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列でないことを定義に基づいて示せ.

§5 正項級数の収束判定条件

Def 5.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする.
級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$.
収束しないとき, 発散する という.
このときこの極限値を級数の和といい, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ で和の値を表す.

記号 $a\in\mathbb{R}$ に対し $[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$,
$(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$, $(-\infty,a]:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq a\}$, $(-\infty,a):=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$.
また $(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$.

Prop 5.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{c_n\}_{n=1}^{\infty},\{d_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ で $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は収束, $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は発散するとする. このとき:
(1) $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ a_n\leq c_n$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ a_n\geq d_n$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散.

∵ (1) $N\in\mathbb{N}$, $N\geq n_0$ に対し仮定より
$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}a_n\leq\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}c_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}(a_n-c_n)+\sum_{n=1}^{N}c_n$$
であり, 最右辺は N に関する数列として有界であるので $\left\{\sum_{n=1}^{N}a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ も有界, 従って注意4.7より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) $N\in\mathbb{N}$, $N\geq n_0$ に対し, (1)と同様に仮定より
$$\sum_{n=1}^{N}a_n\geq\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}d_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}(a_n-d_n)+\sum_{n=1}^{N}d_n.$$
注意4.7より $\left\{\sum_{n=1}^{N}d_n\right\}_{N=n_0}^{\infty}$ は上に非有界なので, 上の不等式から $\left\{\sum_{n=1}^{N}a_n\right\}_{N=n_0}^{\infty}$ も上に非有界であり, 従って再び注意4.7により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ▨

Thm 5.3 (ratio test) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$ とする.
(1) $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が(上に)有界で $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ならば) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ a_{n+1}\geq a_n$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ もしくは $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ならば)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

∵ (1) $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\sup_{n\geq n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n}=:r<1$ であるので, $\forall n\geq n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq r$ すなわち $a_{n+1}\leq ra_n$, 従ってこれを繰り返し用いることで $\forall n\geq n_0$, $a_n\leq r^{n-n_0}a_{n_0}$ となる. すると $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-n_0}a_{n_0}$ が収束することとProp 5.2-(1)から, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) $\forall n\geq n_0$, $a_{n+1}\geq a_n$ を繰り返し用いることで, $\forall n\geq n_0$, $a_n\geq a_{n_0}>0$ が分かる. 特に, $\forall N\in\mathbb{N}$ に対し $n\in\mathbb{N}$ を $n\geq\max\{n_0,N\}$ となるように取れば $n\geq N$, $a_n\geq a_{n_0}>0$ なので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は0に収束しない. 従って演習5.1の対偶により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ▨

Thm 5.4 (root test) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ とする.
(1) $\{a_n^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ が(上に)有界で $\limsup_{n\to\infty}a_n^{1/n}<1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}a_n^{1/n}<1$ ならば) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) $\forall n_0\in\mathbb{N},\exists n\geq n_0,\ a_n^{1/n}\geq1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}a_n^{1/n}>1$ もしくは $a_n^{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ならば)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

∵ (1) $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $r:=\sup_{n\geq n_0}a_n^{1/n}<1$ であるので, $\forall n\geq n_0$, $a_n^{1/n}\leq r$ すなわち $a_n\leq r^n$. すると $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ が収束することとProp 5.2-(1)から, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) 仮定より $\forall n_0\in\mathbb{N},\exists n\geq n_0,\ a_n\geq1$ となりこれは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が0に収束しないことを意味するので, 演習5.1の対偶により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ▨

Thm 5.5 (Euler-Maclaurin (オイラー マクローリン) の判定法)
a を整数とし, $f:[a,\infty)\to[0,\infty)$ は単調非増加
(つまり $a\leq{}^\forall s\leq{}^\forall t$, $f(s)\geq f(t)$)とする. このとき:
$\sum_{n=a}^{\infty}f(n)$ が収束 $\Longleftrightarrow$ $\exists\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}$.

注 f が単調非増加であることから, $\forall t\in[a,\infty)$ に対し f は $[a,t]$ 上Riemann可積分であることが示される. また, $\exists\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\int_a^N f(x)dx\right\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界であることが注意4.7と同様にして分かる.

Thm 5.5の証明
$n\geq a$ なる整数 n に対し, $n\leq x\leq n+1$ ならば
$$f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)$$
であるので, この各辺を $n\leq x\leq n+1$ で積分することにより
$$f(n)\geq\int_n^{n+1}f(x)dx\geq f(n+1).\quad\cdots\cdots(5.1)$$
$N\geq a$ なる整数 N に対して, (5.1)を $a\leq n\leq N$ に対して各辺加えると $\sum_{n=a}^{N}f(n)\geq\int_a^{N+1}f(x)dx\geq\sum_{n=a}^{N+1}f(n)-f(a)$.
これは $\left\{\sum_{n=a}^{N}f(n)\right\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界 $\Leftrightarrow$ $\left\{\int_a^N f(x)dx\right\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界を意味し, 前者は注意4.7により $\sum_{n=a}^{\infty}f(n)$ が収束することと同値, 後者は $\exists\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}$ と同値であるので, Thm 5.5の主張の"$\Leftrightarrow$"が従う. ▨

演習5.1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であることを示せ.
演習5.2 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ の収束・発散を判定せよ.
演習5.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ で収束, $0<p\leq1$ で発散することをThm 5.5を用いて示せ.

(Thm 6.6 の証明の続き) そこで $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の並べ替え $\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を
$b_1,\cdots,b_{k_1},c_1,\cdots,c_{l_1},b_{k_1+1},\cdots,b_{k_2},c_{l_1+1},\cdots,c_{l_2},b_{k_2+1},\cdots\cdots$
で定める. すると $N\in\mathbb{N}$ に対し, $k_{n(N)}+l_{n(N)}\geqq N>k_{n(N)-1}+l_{n(N)-1}$ となる $n(N)\in\mathbb{N}$ がただ1つ存在し, このとき s_n,t_n の定義から $\min\{t_{n(N)-1},t_{n(N)}\}\leqq\sum_{m=1}^{N}a_{\sigma(m)}\leqq s_{n(N)}$ となる. そして容易に分かるように $n(N)\xrightarrow{N\to\infty}\infty$ なので, $N\to\infty$ とすれば $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\alpha$ となる. ■

注意6.8 Thm6.6で"$\alpha\in\mathbb{R}$"の代わりに $\alpha=\infty,-\infty$ としても成立. 証明も同様.

演習6.1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ は収束することを示せ.

演習6.2 $a,b\in(0,\infty)$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty}(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)/\!/(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)$ の収束・発散を判定せよ.

演習6.3 $\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-p}$ は $p>1$ で収束, $0<p\leqq1$ で発散, を示せ.

§6 絶対収束と条件収束

Def6.1 $a\in\mathbb{R}$ に対し $a^+,a^-\in[0,\infty)$ を次で定める:
$$a^+:=\max\{a,0\}=\frac{1}{2}(|a|+a)=\begin{cases}a & (a\geqq0)\\ 0 & (a\leqq0)\end{cases},$$
$$a^-:=-\min\{a,0\}=\frac{1}{2}(|a|-a)=\begin{cases}0 & (a\geqq0)\\ -a & (a\leqq0)\end{cases}.$$
明らかに $a=a^+-a^-$, $|a|=a^++a^-$ である.

Prop6.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とするとき, (絶対収束の定義はThm4.6参照)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ が共に収束.

☺ ($\Longrightarrow$) $0\leqq a_n^{\pm}\leqq|a_n|$ なので, Prop5.2-(1)より分かる.
($\Longleftarrow$) $N\in\mathbb{N}$ とすると
$$\sum_{n=1}^{N}|a_n|=\sum_{n=1}^{N}(a_n^++a_n^-)=\sum_{n=1}^{N}a_n^++\sum_{n=1}^{N}a_n^-\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-(\in\mathbb{R}).$$ ■

Prop6.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ とし, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は全単射とする.
このとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ が収束 $\iff$ $\left\{\sum_{n\in A}a_n \,\middle|\, A\subset\mathbb{N}\ 有限集合\right\}$ は有界.
また「収束」のとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sup_{A\subset\mathbb{N}\ 有限}\sum_{n\in A}a_n$.
(ただし $A=\emptyset$ のとき $\sum_{n\in A}a_n:=0$.)

☺ $\left\{\sum_{n\in A}a_n \,\middle|\, A\subset\mathbb{N}有限\right\}$ が有界のとき, $\left\{\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)} \,\middle|\, N\in\mathbb{N}\right\}$ はその部分集合なのでやはり有界で, 従って注意4.7により $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ は収束する.
そこで以下 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ は収束すると仮定する. このとき $A\subset\mathbb{N}$ は有限とすると $\exists N\in\mathbb{N}, A\subset\{\sigma(1),\cdots,\sigma(N)\}$ であることが σ の全射性から分かり, 従って
$$\sum_{n\in A}a_n\leqq\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}.$$
よって最左辺は $A\underset{有限}{\subset}\mathbb{N}$ について有界かつ
$$\sup_{A\subset\mathbb{N}:有限}\sum_{n\in A}a_n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}.\cdots\cdots①$$
一方 $N\in\mathbb{N}$ に対し, $A_N:=\{\sigma(1),\cdots,\sigma(N)\}$ とおくと
$\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)}=\sum_{n\in A_N}a_n\leqq\sup_{A\subset\mathbb{N}:有限}\sum_{n\in A}a_n$ であるので
$N\to\infty$ とすれば $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}\leqq\sup_{A\subset\mathbb{N}:有限}\sum_{n\in A}a_n\cdots\cdots②$
①,②より $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sup_{A\subset\mathbb{N}:有限}\sum_{n\in A}a_n$ であり, この右辺は σ に依存しないので σ として $\mathbb{N}$ の恒等写像をとれば主張が得られる. ■

Thm6.4 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とし, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は全単射とする.
このとき, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ が絶対収束, であり, 「絶対収束」のとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$.

☺ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ が共に収束 (Prop6.3)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ が絶対収束 $\overset{\text{Prop6.2}}{\iff}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^-$ が共に収束
であり, 「絶対収束」のとき Prop6.3より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\pm}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^{\pm}$
なので $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n^+-a_n^-)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$
$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_{\sigma(n)}^+-a_{\sigma(n)}^-)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^-$ ■

Def6.5 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする.
級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が<u>条件収束する</u> $\overset{def}{\iff}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するが絶対収束はしない.

Thm6.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とし, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は条件収束すると仮定する.
このとき $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\exists\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 全単射, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\alpha$.

系6.7 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とするとき,
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束 $\iff$ $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 全単射, $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$.

☺ Thm6.4とThm6.6より直ちに従う. ■

Thm6.6の証明 $\alpha\in\mathbb{R}$ を任意に取り固定する.
注意4.7より $\left\{\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right\}_{N=1}^{\infty}$ は上に有界でなく, 単調非減少なので $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|=\infty$ である. Prop6.2より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ と $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ の少なくとも一方は発散するが, $\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}a_n^+-\sum_{n=1}^{N}a_n^-$ が $N\to\infty$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\in\mathbb{R}$ に収束するので, 仮に $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ と $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ の一方が収束すれば両方収束することになり矛盾する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ は共に発散し, すると冒頭の議論と同様にして $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n^{\pm}=\infty$ が分かる.

さて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のうち $a_n\geqq0$ であるような項だけを順に並べたものを $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_n<0$ であるような項だけを順に並べたものを $\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$ とする; $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n^{\pm}=\infty$ より, どちらの種類の項も無限個ありかつ $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}b_k=\infty$, $\lim_{N\to\infty}\sum_{l=1}^{N}c_l=-\infty$, となる.

$k_0:=l_0:=t_0:=0$ とおき, $n\in\mathbb{N}$ に対し帰納的に
$k_n:=\min\{k\geqq k_{n-1}+1 \mid t_{n-1}+b_{k_{n-1}+1}+\cdots+b_k>\alpha\}$,
$s_n:=t_{n-1}+b_{k_{n-1}+1}+\cdots+b_{k_n}>\alpha$, 定義可能!
$l_n:=\min\{l\geqq l_{n-1}+1 \mid s_n+c_{l_{n-1}+1}+\cdots+c_l<\alpha\}$,
$t_n:=s_n+c_{l_{n-1}+1}+\cdots+c_{l_n}<\alpha$, と定めると,
$n\geqq2$ のとき s_n,t_n の定義から $s_n-b_{k_n}\leqq\alpha<s_n$, $t_n<\alpha\leqq t_n+c_{l_n}$
なので $|s_n-\alpha|\leqq b_{k_n}$, $|t_n-\alpha|\leqq c_{l_n}$ であり, 演習5.1より $b_k\xrightarrow{k\to\infty}0$,
$c_l\xrightarrow{l\to\infty}0$ なので $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}t_n=\alpha$ となる. (ページ左上へ続く)

演習7.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$とし, $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=a$と仮定する. このとき$\lim_{n\to\infty}a_n=a$であることを示せ.

演習7.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$が収束するとき$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\lim_{n\to\infty}a_n|$を示せ.

演習7.3 (1) $n\in\mathbb{N}$, $0\leqq x\leqq 1$とする. $\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k-\frac{1}{1+x}\right|\leqq x^n$を示せ.

(2) $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2$を示せ.

§7 一般の級数の収束条件・条件収束級数の例

Thm 7.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$は単調非増加(つまり $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\geqq a_{n+1}$)とする. このとき$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ならば, 次の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (\text{交代級数})\quad\text{は収束する.}$$

(証) $n\in\mathbb{N}$に対し$S_n:=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$とおくと,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}-S_{2n-1}=a_{2n+1}-a_{2n}\leqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n}=-a_{2n+2}+a_{2n+1}\geqq 0,$$
$$S_{2n+2}-S_{2n+1}=-a_{2n+2}\leqq 0,\ \text{よって}$$
$$S_2\leqq S_{2n}\leqq S_{2n+2}\leqq S_{2n+1}\leqq S_{2n-1}\leqq S_1\ \text{となる.}$$

ゆえに$\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$は下に有界で単調非増加, $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$は上に有界で単調非減少であり, 従ってProp1.8により$t:=\exists\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\in\mathbb{R}$かつ$s:=\exists\lim_{n\to\infty}S_{2n}\in\mathbb{R}$. ところが$\lim_{n\to\infty}a_n=0$なので

$$s-t=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_{2n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-a_{2n})=0.$$

よって$s=t$となり, すると演習7.1により$\exists\lim_{n\to\infty}S_n\in\mathbb{R}$. ■

例7.2 Thm 7.1により$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$は収束し, 演習4.5(または演習5.3)によりこれは条件収束.

実は(演習7.3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2.$$

これを用いると, 次のようにしてこの級数の「配置替え」

cf. Thm6.6 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)-1}}{\sigma(n)}$, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$全単射,

が別の値に収束し得ることが具体的に見てとれる.

上の級数を$\frac{1}{2}$倍すると
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\log 2.$$

各項の前に0を挿入しても級数の収束性や和は不変なので
$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$
$$+0+\frac{1}{4n-2}+0-\frac{1}{4n}+\cdots=\frac{1}{2}\log 2.$$

これと元の級数, すなわち
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+\cdots\cdots=\log 2$$

の和をとった級数を考えれば
$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+0+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2.$$

0に等しい項を除いた級数も同じ和を持つので, 結局
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{3}{2}\log 2>\log 2.$$

Thm 7.1は次のThm 7.3の特別な場合である.

Thm 7.3 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$は単調非増加とし, また$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$で$\{\sum_{k=1}^{n}a_k\}_{n=1}^{\infty}$は有界と仮定する. このとき, もし$\lim_{n\to\infty}p_n=0$であるか

または$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が収束するならば,

$\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n$は収束し, $C:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$とおくと
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n\right|\leqq Cp_1.$$

(証) $s_0:=t_0:=0$とし, $n\in\mathbb{N}$に対し
$$s_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad t_n:=\sum_{k=1}^{n}p_k a_k$$
とおく. $m>n\geqq 0$なる整数m,nを任意にとると,
$$t_m-t_n=\sum_{k=n+1}^{m}p_k a_k\qquad(\text{注}\ \forall k\in\mathbb{N},\ a_k=s_k-s_{k-1})$$

アーベルの(Abel)変形(部分積分の離散版)
$$=\sum_{k=n+1}^{m}p_k(s_k-s_{k-1})$$
$$=\sum_{k=n+1}^{m}p_k s_k-\sum_{k=n}^{m-1}p_{k+1}s_k$$
$$=p_m s_m-p_{n+1}s_n+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})s_k.$$

よって, $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k-p_{k+1}\geqq 0$と3角不等式により
$$|t_m-t_n|\leqq p_m|s_m|+p_{n+1}|s_n|+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})|s_k|$$
$$\leqq C\left(p_m+p_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})\right)$$
$$=2Cp_{n+1}.\quad\cdots\cdots(7.1)$$

$n=0$の場合には$s_n=0=t_n$より, $\forall m\in\mathbb{N}$,
$$|t_m|\leqq p_m|s_m|+\sum_{k=1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})|s_k|$$
$$\leqq C\left(p_m+\sum_{k=1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})\right)=Cp_1.\quad\cdots\cdots(7.2)$$

さて, $\lim_{n\to\infty}p_n=0$である場合には, $\varepsilon\in(0,\infty)$に対し$N\in\mathbb{N}$を$\forall n\geqq N$, $p_n\leqq\frac{\varepsilon}{2C+1}$となるように取ることができ, すると(7.1)より$\forall m>\forall n\geqq N$,
$$|t_m-t_n|\leqq 2Cp_{n+1}\leqq\frac{2C}{2C+1}\varepsilon<\varepsilon,$$
すなわち$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$はCauchy列でありThm4.4により収束する.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が収束する場合には, $p:=\inf_{n\in\mathbb{N}}p_n$とおくとProp1.8より$\lim_{n\to\infty}p_n=p$, 従って$\lim_{n\to\infty}(p_n-p)=0$であり, また$\{p_n-p\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$でこれは単調非増加なので, 前段落の結果から$\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-p)a_n$は収束する. また$\sum_{n=1}^{\infty}pa_n$も収束するので$\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}((p_n-p)a_n+pa_n)$も収束する.

以上よりいずれの場合にも$\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n$は収束し, (7.2)で$m\to\infty$としてProp2.3, Prop2.4を用いれば,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n\right|=\left|\lim_{m\to\infty}t_m\right|\underset{\text{演習7.2}}{=}\lim_{m\to\infty}|t_m|\leqq Cp_1.\ ■$$

演習7.4 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$ が (1)収束すること (2)絶対収束しないこと を示せ.

演習7.5 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ が (1)収束すること (2)絶対収束しないこと を示せ.

§8 関数列の極限と一様収束

☆連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 f は連続か？

答1 一般に連続とは限らない！(例8.2参照)

まず, 次を思い出そう:

Def 8.1 (関数の連続性) $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f: I\to\mathbb{R}$ とする.

● f が $x\in I$ において連続
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in I$, 「$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$」

● f が連続
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in I$, f は x において連続.

例8.2 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: [0,1]\to\mathbb{R}$ を $f_n(x) := x^n$ で定める. このとき $x\in[0,1]$ に対し

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0\leq x<1) \\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

となり, 極限関数

$f: [0,1]\to\mathbb{R}$ は明らかに1において連続でない. (演習8.1)

答2 連続関数列の一様収束極限は連続！ (Thm 8.4)

Def 8.3 (一様収束) $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f: I\to\mathbb{R}$, また各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: I\to\mathbb{R}$ とする.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で一様収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n\geq N, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

(N は) ε だけに依存して決まる ($x\in I$ に依らない！)

Thm 8.4 $I\subset\mathbb{R}$ とし各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: I\to\mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f: I\to\mathbb{R}$ に I 上で一様収束するならば f は連続である.

(証) $x\in I$ を任意に取る. f が x において連続であることを示せばよい. その為に, $\varepsilon>0$ を任意に取る. まず $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で一様収束するという仮定から,

$$\exists N\in\mathbb{N}, \forall y\in I, \forall n\geq N, |f_n(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

特に, $n=N$ とすれば

$$\forall y\in I, \quad |f_N(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad \cdots\cdots (8.1)$$

さらに f_N は x において連続であるので,

$$\exists\delta>0, \forall y\in I, 「|y-x|<\delta \Rightarrow |f_N(y)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}」 \quad \cdots\cdots (8.2)$$

よって3角不等式と(8.1), (8.2)から, $|y-x|<\delta$ であるような任意の $y\in I$ に対し

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

よって f は x において連続である. ■

一様収束の定義は次のように言い換えられる:

Prop 8.5 $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f: I\to\mathbb{R}$, また各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: I\to\mathbb{R}$ とする. このとき次の(1), (2), (3)は互いに同値:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I 上一様収束する.

(2) ($\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N$, f_n-f は有界, かつ) $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$. (ただし, $\sup\emptyset := 0$ と定める.)

(3) $\exists N\in\mathbb{N}, \exists\{a_n\}_{n=N}^{\infty}\subset[0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ かつ $\forall n\geq N, \forall x\in I, \ |f_n(x)-f(x)|\leq a_n$.

(証) (1)$\Longrightarrow$(2): $\varepsilon=1$ に対して $\exists N_1\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in I, \forall n\geq N_1, \ |f_n(x)-f(x)|<1$$

であるので, 特に $\forall n\geq N_1$ に対し f_n-f は有界である.

さらに $\varepsilon>0$ を任意に取ると, (1)より $\exists N\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in I, \forall n\geq N, \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \cdots\cdots (8.3)$$

であるので, 特に $\forall n\geq N$ に対し, (8.3)の $x\in I$ についての上限を取ることで $0\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ が分かる.

従って $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$.

(2)$\Longrightarrow$(3): 各 $n\geq N$ に対し $a_n := \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ とおくと, $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}\subset[0,\infty)$ であり, (2)により $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. また上限 sup の定義より各 $n\geq N$ に対し $\forall x\in I, |f_n(x)-f(x)|\leq a_n$.

(3)$\Longrightarrow$(1): $\varepsilon>0$ を任意に取る. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ より

$$\exists M\geq N, \ \forall n\geq M, \ a_n=|a_n|<\varepsilon. \quad \cdots\cdots (8.4)$$

すると $\forall x\in I, \forall n\geq M$ に対し(3)と(8.4)より

$$|f_n(x)-f(x)| \underset{(3)}{\leq} a_n \underset{(8.4)}{<} \varepsilon.$$

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I 上一様収束する. ■

演習8.1 例8.2の f が1において連続でないことを定義に基づき示せ.

演習8.2 $g, g_n: [1,\infty)\to\mathbb{R}$ を $g(x) := \frac{1}{x}$, $g_n(x) := \frac{n}{1+nx}$ で定める. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[1,\infty)$ 上で一様収束することを示せ.

演習8.3 $h_n: [0,2]\to\mathbb{R}$ を $x\leq\frac{1}{n}$ で $h_n(x) := 2n^2x$, $x\geq\frac{2}{n}$ で $h_n(x) := 0$, $\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{2}{n}$ で $h_n(x) := 4n-2n^2x$, により定める. 次を示せ.
(1) $\forall x\in[0,2]$, $h_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$. (2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は0に $[0,2]$ 上一様収束しない.

No. 9

Date

Thm 9.4′ $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とする. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ で定めると, F は微分可能で $\forall x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$.

(∵) $x\in[a,b]$, $\varepsilon>0$ とする. f は x において連続なので $\exists\delta>0$, $\forall y\in[a,b]$, "$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$."

すると, $0<|h|<\delta$, $x+h\in[a,b]$ であるような任意の $h\in\mathbb{R}$ に対し
$$-\varepsilon \leqq h^{-1}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt = h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x) \leqq \varepsilon,$$
($h<0$ であっても正しいことに注意)

すなわち $|h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x)|\leqq\varepsilon$.

これは $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$,

つまり F が x において微分可能で $F'(x)=f(x)$ であることを意味する. ■

§9 一様収束と微積分

☆ $[a,b]$ 上 $f_n\to f$ のとき, $\int_a^b f_n(x)\,dx\to\int_a^b f(x)\,dx$?

答1 一般には正しくない! (例9.1参照)

例9.1 $n\in\mathbb{N}$ に対し $h_n:[0,2]\to\mathbb{R}$ を
$$h_n(x):=\begin{cases}2n^2x & (0\leqq x\leqq 1/n)\\ 4n-2n^2x & (\frac{1}{n}\leqq x\leqq \frac{2}{n})\\ 0 & (2/n\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$
で定めると, 演習8.3-(1)より
$$\forall x\in[0,2],\ \lim_{n\to\infty}h_n(x)=0$$
であるが, 一方明らかに
$$\int_0^2 h_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 2n=2 \underset{(収束しない!)}{\not\xrightarrow{n\to\infty}} 0=\int_0^2 0\,dx.$$

答2 一様収束する(連続)関数列に対しては正しい! (Thm 9.2)

Thm 9.2 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であるとする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上で一様収束するならば, (f は連続で) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

(∵) Thm 8.4 より f は連続であり, 従ってその積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される. Prop 8.5-(3) のような $N\in\mathbb{N}$ と $\{a_n\}_{n=N}^\infty\subset[0,\infty)$ を取ると, $\forall n\geqq N$ に対し,
$$\forall x\in[a,b],\ -a_n\leqq f_n(x)-f(x)\leqq a_n \quad\cdots\cdots(9.1)$$
であるので (9.1) を $[a,b]$ 上で積分すれば
$$-a_n(b-a)\leqq\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\leqq a_n(b-a).$$
そこで $\lim_{n\to\infty}a_n(b-a)=0\cdot(b-a)=0$ なので挟み撃ちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right)=0$,

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$. ■

☆ f_n, f が微分可能で $f_n\to f$ のとき, $f_n'\to f'$ か?

答1 (f_n が f に一様収束していても) 一般には正しくない! (例9.3参照)

例9.3 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f_n(x):=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ で定める. このとき $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $[0,1]$ 上で 0 に一様収束する (演習9.1) が, 一方 $f_n'(x)=x^n$ なので
$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\begin{cases}0 & (0\leqq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$
となり, $\lim_{n\to\infty}f_n'(1)$ は $(0)'=0$ と等しくない.

答2 f_n' が (連続であって) 一様収束するならば正しい! (Thm 9.5)

まず次の重要な定理を思い出そう:

Thm 9.4 (微分積分学の基本定理)
$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は微分可能かつ f' は連続とする. このとき $\forall x\in[a,b]$ に対し
$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Thm 9.5 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ は微分可能かつ f_n' は連続とする. また $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ とする. このとき,
(i) $\forall x\in[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, かつ
(ii) $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ がある $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上で一様収束する
ならば, f は微分可能で $f'=g$ である.

(∵) f_n' は連続なので Thm 8.4 より g は連続であり, $\forall x\in[a,b]$ に対し $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ は g に $[a,x]$ 上で一様収束するので Thm 9.2 により $\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt=\int_a^x g(t)\,dt$. すると Thm 9.4 と (i) により
$$f(x)-f(a)=\lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) =\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt=\int_a^x g(t)\,dt,$$
すなわち
$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt.\quad\cdots\cdots(9.2)$$
ところが g は連続なので, ページ上の Thm 9.4′ により
$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)$$
であり, よって (9.2) の右辺 (すなわち f) は微分可能で $f'(x)=g(x)$ となる. ■

注意9.6 実は
- Thm 9.2 で「連続」を「Riemann 積分可能」としたもの
- Thm 9.5 で「かつ f_n' は連続」を除いたもの

も成り立つ (松坂和夫著「解析入門」(岩波書店) 2巻 9.1節参照).

演習9.1 例9.3 の $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が 0 に $[0,1]$ 上一様収束することを示せ.

演習9.2 演習8.2 のように g_n, g を $(0,\infty)$ 上で定めるとき, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が g に $(0,\infty)$ 上で一様収束しないことを示せ.

演習9.3 (1) $a\in(0,1)$ とする. $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ が $[0,a]$ 上で 0 に一様収束することを示せ.
(2) $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ が $[0,1)$ 上で 0 に一様収束しないことを示せ.

Thm10.3の証明 $N\in\mathbb{N}$に対し$T_N := \sum_{n=1}^{N}|f_n|$, $S_N := \sum_{n=1}^{N} M_n$とおく. $\varepsilon>0$とする. 仮定(M2)とProp4.2より, $\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geqq L$, $\sum_{n=N+1}^{M} M_n = S_M - S_N < \varepsilon$ であるが, このときさらに仮定(M1)により, $\forall M>\forall N\geqq L, \forall x\in I, |T_M(x)-T_N(x)| = \sum_{n=N+1}^{M}|f_n(x)| \leqq \sum_{n=N+1}^{M} M_n < \varepsilon$ となる. 従ってThm10.7により $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$ はI上で一様収束する, つまり $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ はI上で一様に絶対収束する. ■

§10 関数項級数の一様収束・一様収束に対するCauchyの条件

Def10.1 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : I\to\mathbb{R}$とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I上で 一様収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ が(ある $g : I\to\mathbb{R}$ に) I上で一様収束する.

(当然このとき $\forall x\in I$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束して $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I上で 一様に絶対収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ が I上で一様収束する.

Thm10.2 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : I\to\mathbb{R}$とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I上で一様に絶対収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I上で一様収束する.

(Thm4.6「絶対収束する級数は収束する」の一様収束版)

次の判定法は極めて実用的である.

Thm10.3 (Weierstrass(ワイエルストラス) の M-test)

$I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : I\to\mathbb{R}$とする. さらにある $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ が存在して次の(M1),(M2)が成り立つとする:

(M1) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I, |f_n(x)|\leqq M_n$.

(M2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I上で一様に絶対収束する.

Thm10.2, Thm10.3 の証明は後で行う. まず Thm8.4, Thm9.2, Thm9.5 の「級数版」を系として述べる.

系10.4 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : I\to\mathbb{R}$は連続とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I上で一様収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : I\to\mathbb{R}$ は連続である.

☺ 各$N\in\mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=1}^{N} f_n$ は I上の連続関数であるので, そのI上での一様収束極限である $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n$ すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は Thm8.4 によりI上の連続関数である. ■

系10.5 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$は連続とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が $[a,b]$上で一様収束するならば, ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は連続で)

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

☺ $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ に Thm9.2 が適用できるので,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

となる. ■

系10.6 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ は微分可能かつ f_n' は連続とする. このとき

(i) $\forall x\in[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束, かつ

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ が $[a,b]$上で一様収束する

ならば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は微分可能で $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

☺ $(\sum_{n=1}^{N} f_n)' = \sum_{n=1}^{N} f_n'$ が連続, かつ $N\to\infty$ のとき $[a,b]$上で一様収束するので, Thm9.5 が $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$, $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n$, $g := \sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^{N} f_n)'$ に対して適用でき, よって $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は微分可能で $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = f' = g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ となる. ■

次の定理はThm10.2, Thm10.3の証明に用いられ, 理論的にも重要である.

Thm10.7 (一様収束に対するCauchyの条件)

$I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n : I\to\mathbb{R}$とする. このとき次の(1),(2)は互いに同値である:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある $f : I\to\mathbb{R}$ に I上で一様収束する.

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n,m\geqq N, |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

↳ εだけに依存して決まる($x\in I$に依らない!)

☺ (1)$\Longrightarrow$(2): $\varepsilon>0$を任意に取る. (1)により, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n\geqq N, |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (Def8.3参照).

すると $\forall x\in I, \forall n,m\geqq N$ に対し3角不等式より

$|f_n(x)-f_m(x)| \leqq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

(2)$\Longrightarrow$(1): 条件(2)より特に, 各$x\in I$に対し$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列であり, 従ってThm4.4により $\exists\lim_{n\to\infty} f_n(x)\in\mathbb{R}$. そこで $f : I\to\mathbb{R}$ を $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I上で一様収束することを示すために, $\varepsilon>0$を任意に取る. (2)より $\exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n,m\geqq N, |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 特に $m\to\infty$ とすることにより, $\forall x\in I, \forall n\geqq N$,

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\lim_{m\to\infty}(f_n(x)-f_m(x))\right| \overset{\text{演習7.2}}{=} \lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I上で一様収束する. ■

Thm10.2の証明

$N\in\mathbb{N}$に対し $S_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$, $T_N := \sum_{n=1}^{N}|f_n|$ とおき, $\varepsilon>0$とする. Thm10.7により, $\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geqq L, \forall x\in I$,

$$\sum_{n=N+1}^{M}|f_n(x)| = T_M(x)-T_N(x) < \varepsilon \quad\cdots\cdots(10.1)$$

となるが, 3角不等式と(10.1)よりさらに $\forall M>\forall N\geqq L, \forall x\in I$ に対し $|S_M(x)-S_N(x)| = |\sum_{n=N+1}^{M} f_n(x)| \leqq \sum_{n=N+1}^{M}|f_n(x)| < \varepsilon$ となるので, Thm10.7により $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ は(すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は) I上で一様収束する. ■

No. 11

Date

<u>演習10.1</u> $a\in(0,\infty)$とし，各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$を$f_n(x):=nx^a e^{-nx^2}$で定める．(1) f_nの最大値を求めよ．(2) $a>4$ならば$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$は$[0,\infty)$上で一様収束することを示せ．

§11 べき級数(整級数)

<u>Def 11.1</u> $\alpha\in\mathbb{R}$とする．ある$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$により

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\alpha)^n\left(=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\cdots\right)$$

の形に書かれる($x\in\mathbb{R}$を変数とする)級数を，αを中心とする<u>べき級数</u>(または<u>整級数</u>)という．

一般の$\alpha\in\mathbb{R}$を中心とするべき級数は0を中心とする場合を考えxを$x-\alpha$で置き換えれば得られるので，以下0を中心とするべき級数を考えその収束性・性質について述べる．

べき級数の収束性は次の定理のようにまとめられる．

<u>Thm 11.2</u> $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし，$R$を次で定める：

$$R:=\begin{cases}\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1} & (\{|a_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}\text{が上に有界のとき})\\ 0 & (\{|a_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}\text{が上に有界でないとき})\end{cases}$$

(ただし$0^{-1}:=\infty$と定め，$\forall x\in\mathbb{R}$, $x<\infty$と約束する)．

(1) $R>0$ならば，$\forall R'\in(0,R)$に対しべき級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は$[-R',R']$上で一様に絶対収束する．

(2) $|x|>R$なる任意の$x\in\mathbb{R}$に対し$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は発散する．

☺

(1) $R>0$と仮定し，$R'\in(0,R)$とする．このとき$n\geq1$に対し$|a_n(R')^n|^{1/n}=|a_n|^{1/n}R'$であるので，$\{|a_n(R')^n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$は(上に)有界で$\limsup_{n\to\infty}|a_n(R')^n|^{1/n}=\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)R'$であり，$R'<R=\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$より$\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)R'<1$．従って root test (Thm 5.4-(1))により$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(R')^n|$は収束し，さらに$\forall n\geq0$, $\forall x\in[-R',R']$, $|a_nx^n|\leq|a_n(R')^n|$であるので，WeierstrassのM-test (Thm 10.3)により$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は$[-R',R']$上で一様に絶対収束する．

(2) $R=\infty$のときは主張のようなxは存在しないので，$R\neq\infty$と仮定してよい．$|x|>R$なる$x\in\mathbb{R}$を任意に取ると，$R>0$のときは(1)の冒頭と同様にして$\{|a_nx^n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$は(上に)有界で$\limsup_{n\to\infty}|a_nx^n|^{1/n}=\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)|x|>1$，他方$R=0$のときは$\{|a_nx^n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}=\{|x|\cdot|a_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$は上に有界ではない．よっていずれの場合にも，条件「$\forall n_0\in\mathbb{N}$, $\exists n\geq n_0$, $|a_nx^n|^{1/n}>1$，従って$|a_nx^n|>1$」が成立することになり，特に$\{a_nx^n\}_{n=0}^{\infty}$は0に収束しない．ゆえに演習5.1の対偶により$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は発散する． ■

(Thm 11.5の証明の続き) $n\geq1$とすれば$\forall k\geq n$に対し

$$|a_k|^{1/k}\leq|ka_k|^{1/k}\leq(1+2k^{-1/2})|a_k|^{1/k}\leq(1+2n^{-1/2})\sup_{\ell\geq n}|a_\ell|^{1/\ell}.$$

よって$\{|na_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$は上に有界，かつ$\forall n\geq1$に対し

$$\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k}\leq\sup_{k\geq n}|ka_k|^{1/k}\leq(1+2n^{-1/2})\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k}$$

となり，Lemma 2.2-(1), Prop 2.3, Prop 2.4を用いて$n\to\infty$とすることで$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n}$，すなわち$R=R_1$を得る．微分については$\forall R'\in(0,R)$に対し$[-R',R']$上でThm 11.2-(1)により系10.6が使えて分かる． ■

<u>Def 11.3</u> $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$に対し，Thm 11.2の$R$をべき級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の<u>収束半径</u>といい，$R>0$のとき区間$(-R,R)$をべき級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の<u>収束区間</u>という．

<u>Prop 11.4</u> $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし，($\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $a_n\neq0$，かつ)極限$r:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$が($r=\infty$を許して)存在すると仮定する．このとき$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径は$r$である．

☺ $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径を$R$とおく．$r=R$を示せばよい．$0\leq n<n_0$なる$n$について$a_n$を1で置き換えても$r,R$は変化しないので，この置き換えにより$\forall n\geq0$, $a_n\neq0$と仮定してよい．さて，$x\in\mathbb{R}$とする．このとき次が成り立つ：

<u>claim</u> $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$は$|x|<r$ならば収束し$|x|>r$ならば発散．

☺ $x=0$ならば$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$は明らかに収束するので，$x\neq0$と仮定して示せばよい．$n\geq0$に対し($\frac{|x|}{0}:=\infty$, $\frac{|x|}{\infty}:=0$として)

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|\xrightarrow{n\to\infty}\frac{|x|}{r}\lesseqgtr1\ (|x|\lesseqgtr r\text{のとき})$$

なので，ratio test (Thm 5.3)を適用すればclaimが従う． //(claim)

ところがclaimの主張はrをRで置き換えても成り立つことがThm 11.2より分かり，両者は$r\neq R$のときには同時に成立し得ないので，$r=R$でなければならない． ■

<u>Thm 11.5</u> $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし，$R$を$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$の収束半径とする．このとき$\forall k\in\mathbb{N}$に対し$\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$の収束半径も$R$である．さらに$R>0$ならば，$x\in(-R,R)$に対するべき級数の和$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$は収束区間$(-R,R)$上で無限回微分可能であり，$\forall k\in\mathbb{N}$に対し$(-R,R)$上で$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$．

☺ 一般の$k\in\mathbb{N}$に対する主張は$k=1$の場合とkに関する数学的帰納法から直ちに従うので，$k=1$の場合に示せばよい．$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$と$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$の収束・発散は一致するためThm 11.2により両者の収束半径は等しいことに注意し，その共通の収束半径をR_1とおく．$\forall n\geq1$に対し$|na_n|^{1/n}=n^{1/n}|a_n|^{1/n}\geq|a_n|^{1/n}$であることに注意すると，まず$\{|a_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$が上に有界でないときは$\{|na_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$も上に有界でないので$R_1=0=R$．そこで以下$\{|a_n|^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$は上に有界と仮定する．$\forall n\geq2$に対し二項定理により$n=(1+n^{1/n}-1)^n>2^{-1}n(n-1)(n^{1/n}-1)^2$，従って$\forall n\geq1$に対し$1\leq n^{1/n}\leq1+2n^{-1/2}$であることに注意すると(ページ右上へ続く)