数学B　講義ノート

梶野　直孝

神戸大学基礎教養科目

§1. 複素数とその存在

高校数学の復習：複素数とは：

『$i^2=-1$ を満たす「数」（虚数単位）と実数 a, b により $a+bi$ と表される「数」』

- $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$ 「同値」
- $i^2=-1$ であること以外は四則演算（加減乗除）のやり方には変更点なし

素朴な疑問 そのような「数」i は存在するのか？
また $i^2=i\cdot i$ や $b\cdot i$ などの「積」，
$a+bi$ などの「和」の意味は？

今日の話「複素数（の全体）」という数の体系の厳密な定義を与える！

有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$ については既知のものとして認める．$\mathbb{F}$ で $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$ を表すとき，$\mathbb{F}$ には次を満たす四則演算が定まっていたことを思い出そう：

公理1.1

（和0）任意の $a\in\mathbb{F}$ と $b\in\mathbb{F}$ に対して $\mathbb{F}$ の元 $a+b$（a と b の和）が定まる．

（和1）任意の $a, b\in\mathbb{F}$ に対し
$$a+b=b+a.$$

（和2）任意の $a, b, c\in\mathbb{F}$ に対し
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

（和3）次を満たす $0\in\mathbb{F}$ が存在する：
任意の $a\in\mathbb{F}$ に対し $a+0=a$.

（和4）任意の $a\in\mathbb{F}$ に対し，$-a\in\mathbb{F}$ が存在して $a+(-a)=0$.

（積0）任意の $a, b\in\mathbb{F}$ に対して，$\mathbb{F}$ の元 ab（a と b の積，$a\cdot b$ とも書く）が定まる．

（積1）任意の $a, b\in\mathbb{F}$ に対し
$$ab=ba.$$

（積2）任意の $a, b, c\in\mathbb{F}$ に対し
$$(ab)c=a(bc).$$

（積3）次を満たす $1\in\mathbb{F}$ が存在する：
$1\neq 0$，かつ 任意の $a\in\mathbb{F}$ に対し $a1=a$.

（積4）$a\neq 0$ であるような任意の $a\in\mathbb{F}$ に対し，$a^{-1}\in\mathbb{F}$ が存在して $aa^{-1}=1$.

（分配）任意の $a, b, c\in\mathbb{F}$ に対し
$$a(b+c)=ab+ac.$$

さて，我々は実数の全体 $\mathbb{R}$ に $i^2=-1$ を満たす「数」i を「付け加えて」，全体としてやはり公理1.1が満たされるようにしたい．そのような体系は次のように「2次元の世界」を考えることにより得ることができる．

$\mathbb{C}$ を，2つの実数 a, b の順序付けられた組 (a, b) の全体とする：
$$\mathbb{C}:=\{(a,b)\mid a, b\in\mathbb{R}\}.$$

（要するに，「平面上の点全体の集合」あるいは「平面ベクトル全体の集合」のことである．この集合は通常 $\mathbb{R}^2$ と書かれる．）

$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$，$\beta=(c,d)\in\mathbb{C}$ とする．
α, β は「平面ベクトル」なので，高校数学でも学んだ通り，その和
$$\alpha+\beta:=(a+c, b+d)\in\mathbb{C}$$
が定まる．問題は「積」$\alpha\beta$ をどう定めればよいか，であるが，これは最終的に成り立つはずの式
「$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$」
を見越して，逆にこの右辺を定義として採用する．すなわち，$\alpha\beta\in\mathbb{C}$ を次で定める：
$$\alpha\beta:=(ac-bd, ad+bc)\in\mathbb{C}.$$

定理1.2 $\mathbb{C}$における和と積を上記のように定義すると，$\mathbb{F}=\mathbb{C}$として公理1.1に挙げた性質が全て成り立つ．(和3)の0は$(0,0)$，(積3)の1は$(1,0)$である．

証明 任意の$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$に対し上記の定義で$\alpha+\beta\in\mathbb{C}$と$\alpha\beta\in\mathbb{C}$が定まっているので，(和0)，(積0)は成り立つ．

(和1)：任意の$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$と$\beta=(c,d)\in\mathbb{C}$に対し

$$\alpha+\beta=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=\beta+\alpha.$$

(和2)：演習問題とする．

(和3)：$\mathbb{0}:=(0,0)\in\mathbb{C}$とおくと，任意の$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$に対し

$$\alpha+\mathbb{0}=(a+0,b+0)=(a,b)=\alpha.$$

(和4)：$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$を任意に取る．このとき$-\alpha:=(-a,-b)\in\mathbb{C}$とおけば

$$\alpha+(-\alpha)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)=\mathbb{0}.$$

(積1)：任意の$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$, $\beta=(c,d)\in\mathbb{C}$に対し

$$\alpha\beta=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=\beta\alpha.$$

(積2)：演習問題とする．

(積3)：$\mathbb{1}:=(1,0)\in\mathbb{C}$とおくと，$1\neq0$なので$\mathbb{1}=(1,0)\neq(0,0)=\mathbb{0}$である．さらにまた任意の$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$に対し

$$\alpha\mathbb{1}=(a1-b0,a0+b1)=(a,b)=\alpha.$$

(積4)：$\alpha\neq\mathbb{0}$であるような$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$を任意に取る．このとき$\alpha=(a,b)\neq(0,0)=\mathbb{0}$より$a\neq0$または$b\neq0$，すなわち$a^2+b^2>0$であり，そこで

$$\alpha^{-1}:=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\in\mathbb{C}$$ とおくと，

$$\alpha\alpha^{-1}=\left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2},\ a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=\mathbb{1}.$$

(分配)：任意に$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$, $\beta=(c,d)\in\mathbb{C}$, $\gamma=(e,f)\in\mathbb{C}$を取る．このとき

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma)&=(a,b)\cdot(c+e,d+f)\\&=(a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e))\\&=(ac-bd+ae-bf,\ ad+bc+af+be)\\&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\&=\alpha\beta+\alpha\gamma.\end{aligned}$$ $\blacksquare$

命題1.3 任意の$a,b\in\mathbb{R}$に対し：
- $a=b\iff(a,0)=(b,0)$.
- $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$.
- $(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)$.

証明 1つ目の主張は明らか．また，$(a,0)+(b,0)=(a+b,0+0)=(a+b,0)$，かつ
$(a,0)\cdot(b,0)=(ab-0\cdot0,\ a0+0b)=(ab,0)$. $\blacksquare$

命題1.4 $i:=(0,1)$とおく．このとき

$$i^2=-\mathbb{1}\ (=(-1,0)).$$

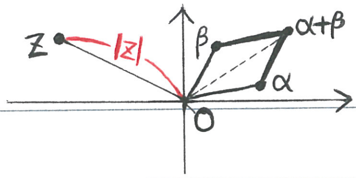
証明
$$\begin{aligned}i^2=i\cdot i&=(0,1)\cdot(0,1)\\&=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)\\&=(-1,0)=-\mathbb{1}.\end{aligned}$$ $\blacksquare$

命題1.5 任意の$a,b\in\mathbb{R}$に対し

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot i.$$

証明
$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0)\cdot i&=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\\&=(a,0)+(b\cdot0-0\cdot1,\ b\cdot1+0\cdot0)\\&=(a,0)+(0,b)=(a+0,0+b)=(a,b).\end{aligned}$$ $\blacksquare$

命題1.3により，$\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$において四則演算を$\mathbb{C}$での四則演算により定めたものは$\mathbb{R}$およびその四則演算と一致しており，そこで$(a,0)$を実数$a$と同一視できる(同じとみなせる)ことが分かる．このとき$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$，かつ$\mathbb{R}$においては実数としての和・積と$\mathbb{C}$の元としての和・積は一致する．$\mathbb{0}=(0,0)$は$0\in\mathbb{R}$と，$\mathbb{1}=(1,0)$は$1\in\mathbb{R}$と同一視され，命題1.4より$i^2=-1$，また任意の$\alpha=(a,b)\in\mathbb{C}$は命題1.5により$\alpha=(a,0)+(b,0)i=a+bi$の形に(唯1通りに)表される．



§2. 代数学の基本定理

複素数が必要と思われた元々の理由

…… 2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

がいつでも($b^2-4ac<0$のときにも)解を持つようにしたかったから。

素朴な疑問 3次以上の方程式も，複素数の中にいつでも解を持つのか？

もし「ある3次以上の方程式は複素数の中に解を持たない」とすると，その方程式にも解をを持たせるためには複素数よりもさらに広い数の体系が必要であることになり，キリがないし，だんだんワケが分からなくなってくる。

幸い，そういうことは起きないことが知られている。そのことを主張するのが次の定理である：

定理2.1(代数学の基本定理)
nを正の整数とする。このとき，複素数を係数とする任意のn次方程式は，複素数の全体$\mathbb{C}$の中に解を(少なくとも1つ)持つ。すなわち，任意の $a_n \neq 0, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{C}$ に対し，ある$z \in \mathbb{C}$が存在して $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$.

以下本§では，(連続関数についての幾つかの基本的な事実を認めた上で)定理2.1に証明を与えてみる。なお以下の証明から見てとれるように，「代数学の基本定理」と呼ばれてはいるもののその証明はほぼ全編「微分積分学」的な議論で占められている。

まず，複素数について幾つか補足説明を加える。

定義2.2 複素数 $z=a+bi \in \mathbb{C}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ に対し $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ と定義し，これをzの絶対値という。(要するに，zの原点からの距離のこと。)

命題2.3 (0) $|0|=0$.

(1) $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha \neq 0$ ならば $|\alpha|>0$.

(2) 任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$に対し $|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$.

(3) (三角不等式) 任意の$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$に対し

$$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|.$$

証明 (0) $|0| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$.

(1) $\alpha = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$, と表すと，$\alpha \neq 0$より $a \neq 0$または$b \neq 0$，従って $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2} > 0$.

(2) 演習問題とする。

(3) $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ と表すと；

● $|\alpha|\cdot|\beta| \geqq ac+bd$.

$$(|\alpha|\cdot|\beta|)^2 - (ac+bd)^2 = |\alpha|^2|\beta|^2 - (ac+bd)^2$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (a^2c^2+2acbd+b^2d^2)$$
$$= a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = (ad-bc)^2 \geqq 0$$

なので $(|\alpha|\cdot|\beta|)^2 \geqq (ac+bd)^2$，よって両辺の$\sqrt{}$を取って $|\alpha|\cdot|\beta| \geqq |ac+bd| \geqq ac+bd$. //

さて，すると2つ目の「$\leqq$」については

$$(|\alpha|+|\beta|)^2 - |\alpha+\beta|^2$$
$$= |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha|\cdot|\beta| - ((a+c)^2+(b+d)^2)$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2|\alpha|\cdot|\beta| - (a^2+c^2+b^2+d^2+2ac+2bd)$$
$$= 2(|\alpha|\cdot|\beta| - (ac+bd)) \geqq 0$$

なので $(|\alpha|+|\beta|)^2 \geqq |\alpha+\beta|^2$. 後は両辺の$\sqrt{}$を取ればよい。
α, βの代わりに$\alpha+\beta, -\beta$を考えれば，1つ目の「$\leqq$」も得られる。 ■

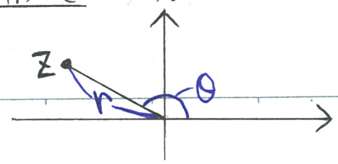
定義2.4 $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ とし，$r := |z|$, $w := r^{-1}z$ とおく($z \neq 0$より $r>0$ であることに注意)。wを $w = s+ti$ $(s,t \in \mathbb{R})$ と表すとき，

$$s^2+t^2 = |w|^2 = |r^{-1}z|^2 = (r^{-1}|z|)^2 = (r^{-1}r)^2 = 1$$

であることに注意すると，ある角θが存在して $(s,t) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(w = \cos\theta + i\sin\theta)$ となり，よって $z = rw$ は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{………(極)}$$

と表せることになる。これを複素数$z(\neq 0)$の極形式という。



定理2.1の証明に対する注意
$\alpha \neq 0$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し
$$|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}.$$
証明 $|\alpha|\cdot|\alpha^{-1}| = |\alpha\cdot\alpha^{-1}| = |1| = 1.$ ■

命題2.5 θ, φ を任意の角とする.
(1) $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$$= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).$$
(2) 任意の正の整数 n に対し
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

証明 演習問題とする. ■

以上の準備の下, 定理2.1の証明に入る.
まず, 次の補題を示す.

補題2.6 n を正の整数とし, $f(z)$ を複素数を係数とする n 次多項式とする:
$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$
$$(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0).$$
このとき, $f(0) \neq 0$ ならば, ある $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在して $|f(z_0)| < |f(0)|$ となる.

証明 仮定より, $a_n \neq 0$, また $a_0 = f(0) \neq 0$ である.
さて, $a_j \neq 0$ であるような $j \in \{1, \cdots, n\}$ のうちで最小のものを k とする. (そのような j は存在する($j=n$)ので, それら j たちのうちで最小のものも確かに定まる.)
すると k の定め方により, $a_k \neq 0$, かつ, $1 \leqq j < k$ であるような任意の整数 j に対し $a_j = 0$.
よって多項式 $f(z)$ は
$$f(z) = a_0 + a_k z^k + \cdots + a_n z^n$$
$$= a_0 + a_k z^k\left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}z + \cdots + \frac{a_n}{a_k}z^{n-k}\right)$$
$$= a_0 + a_k z^k(1 + z h(z)),$$
ただし $h(z) := \dfrac{a_{k+1}}{a_k} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_k}z^{n-k-1}$ $\left(\begin{array}{l} k=n\text{ のとき} \\ h(z):=0 \end{array}\right)$,
と表すことができる.
ここで $r := \left|\dfrac{-a_0}{a_k}\right|$, $A := \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| + \cdots + \left|\dfrac{a_n}{a_k}\right| + 1$ ($k=n$ のとき $A:=1$) とおくと, $a_0 \neq 0$ より $r > 0$ であり, また $|z| \leqq 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し命題2.3-(3)の三角不等式により
$$0 \leqq |h(z)| \leqq \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_k}\right|\cdot|z|^{n-k-1} < A$$
である.

そこで $\lambda \in \mathbb{R}$ を $0 < \lambda < 1$ かつ $\lambda < \dfrac{1}{rA^k}$ を満たすように取り, $\dfrac{-a_0}{a_k} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を満たす角 θ を取って
$$z_0 := (\lambda r)^{1/k}\left(\cos\frac{\theta}{k} + i\sin\frac{\theta}{k}\right)$$
と定める. すると λ の取り方から
$$z_0^k = \lambda r(\cos\theta + i\sin\theta) = \lambda\cdot\frac{-a_0}{a_k} = -\frac{\lambda a_0}{a_k},$$
$$|z_0| = (\lambda r)^{1/k} < (1/A^k)^{1/k} = \frac{1}{A} \leqq 1,\ \text{従って}\ |h(z_0)| < A$$
であり, よって三角不等式と λ の取り方から
$$|f(z_0)| = |a_0 + a_k z_0^k(1 + z_0 h(z_0))|$$
$$= |a_0 - \lambda a_0(1 + z_0 h(z_0))|$$
$$= |a_0||1 - \lambda - \lambda z_0 h(z_0)|$$
$$\leqq |a_0|(1 - \lambda + \lambda|z_0|\cdot|h(z_0)|)$$
$$< |a_0|(1 - \lambda + \lambda|z_0|A)$$
$$< |a_0|(1 - \lambda + \lambda\cdot A^{-1}\cdot A) = |a_0| = |f(0)|.$$ ■

定理2.1の証明 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ とし, n 次多項式 $f(z)$ を $f(z) := a_n z^n + \cdots + a_0$ で定める.
$R := \dfrac{2}{|a_n|}(|a_n| + \cdots + |a_0|)\ (\geqq 2)$ とおく. $|f(z)|$ は $z \in \mathbb{C}$ の関数として実数値連続関数であるので, その $|z| \leqq R$ の範囲での最小値が存在し, そこでその最小値を $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqq R$) において取るものとする.
$|z| \leqq 1\ (< R)$ なる $z \in \mathbb{C}$ を取ることで
$$|f(\alpha)| = \min_{|w| \leqq R}|f(w)| \leqq |f(z)| \leqq |a_n| + \cdots + |a_0|$$
が分かる. 他方, $|z| > R$ なる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,
$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leqq \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^n} \leqq |z|^{-1}(|a_n| + \cdots + |a_0|)$$
$$< R^{-1}(|a_n| + \cdots + |a_0|) = \frac{|a_n|}{2}$$
であることから, 命題2.3-(3)の1つ目の三角不等式より
$$|f(z)| = |a_n z^n + \cdots + a_0| = |z|^n\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|$$
$$\geqq |z|\left(|a_n| - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|\right) > R\left(|a_n| - \frac{1}{2}|a_n|\right)$$
$$= \frac{1}{2}|a_n|R = |a_n| + \cdots + |a_0| \geqq |f(\alpha)|.$$
よって任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $|f(\alpha)| \leqq |f(z)|$ である.
さて, $f(\alpha) \neq 0$ と仮定する. このとき, $g(z)$ を
$$g(z) := f(z + \alpha) = a_n(z+\alpha)^n + \cdots + a_0$$
で定めると, $g(z)$ は $g(0) = f(\alpha) \neq 0$ を満たす n 次多項式となるので補題2.6によりある $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在して
$$|f(z_0 + \alpha)| = |g(z_0)| < |g(0)| = |f(\alpha)|$$
となり, これは $|f(\alpha)|$ の最小性に反し矛盾である.
ゆえに $f(\alpha) = 0$ でなければならない. ■

因数分解の公式(3.2)の証明

$$\begin{aligned} y^3+u^3+v^3-3yuv &= y^3+(u+v)^3-3uv(u+v)-3uvy \\ &= (y+u+v)(y^2-y(u+v)+(u+v)^2)-3uv(y+u+v) \\ &= (y+u+v)(y^2-y(u+v)+(u+v)^2-3uv) \\ &= (y+u+v)(y^2+u^2+v^2-yu-uv-vy). \ \blacksquare \end{aligned}$$

§3. 高次方程式の解の公式

2次方程式

$$x^2+ax+b=0 \quad (a,b\in\mathbb{C})$$

は，次のようにして解けるのであった：

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

であるので，

$$\begin{aligned} & x^2+ax+b=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2-4b}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x+\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}. \quad (\text{2次方程式の解の公式}) \end{aligned}$$

(注意 ただしここで $\sqrt{a^2-4b}$ は $z^2=a^2-4b$ を満たす複素数 z のうちの(任意の)1つを表す．次に述べる命題3.1も参照のこと．)

素朴な疑問 3次以上の方程式の解の公式は？

本§の目的 3次方程式の解の公式(Cardanoの公式)と4次方程式の解の公式(Ferrariの方法)の紹介

全ての基礎になるのは，「方程式 $z^n=a$ は解ける」という事実を述べた次の命題である．

命題3.1 $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ とし，a を極形式で

$$a=R(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad (R>0,\ \varphi\text{は角})$$

と表しておく．また n を正の整数とする．このとき，方程式 $z^n=a$ の(全部で n 個の)解は次で与えられる：

$$z=R^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{k\times 360^\circ}{n}+i\sin\frac{k\times 360^\circ}{n}\right)$$

$$\left(=R^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+k\times 360^\circ}{n}+i\sin\frac{\varphi+k\times 360^\circ}{n}\right)\right),$$

$$k=0,1,\cdots,n-1.$$

特に，$j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ とし，$k=j$ に対する解を $\sqrt[n]{a}$ と表すことにするとき，上の n 個の解は複素数 $\omega_n:=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}$ を用いて

$$z=\sqrt[n]{a}\times\omega_n^k, \quad k=0,1,\cdots,n-1$$

と表される．

証明 演習問題とする．($\omega_n^n=1$ に注意．) ■

注意 命題3.1で $a=0$ のとき，すなわち方程式

$$z^n=0$$

の解は $z=0$ のみである．実際，$z^n=0$ ならば，$|z|^n=|z^n|=|0|=0$ であり，$|z|$ は非負の実数なので $|z|=0$，よって $z=0$ となる．

さて，それでは3次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (a,b,c\in\mathbb{C})$$

の解の公式を求めてみよう．まず，

変数変換 $y=x+\frac{a}{3}$

を行うことで，上の3次方程式の左辺は

$$x^3+ax^2+bx+c=y^3+Ay+B$$

(A,B は a,b,c の具体的な多項式で表せる複素数)と，y^2 の項を含まない形に変形できることが分かる(このことの証明は演習問題とする)．よって

$$y^3+Ay+B=0 \quad \cdots\cdots (3.1)$$

の解 $y=\alpha,\beta,\gamma$ が求められれば，元の3次方程式の解も $x=\alpha-\frac{a}{3},\beta-\frac{a}{3},\gamma-\frac{a}{3}$ と求めることができるので，(3.1)の形の3次方程式の解の公式を求めればよい，ということになる．

(3.1)を解くための手掛かりは，高校で学んだ因数分解の公式

$$\begin{aligned} & y^3+u^3+v^3-3yuv\ (=y^3-3uvy+u^3+v^3) \\ & =(y+u+v)(y^2+u^2+v^2-yu-uv-vy) \quad \cdots\cdots (3.2) \\ & \left(=(y+u+v)(y^2-(u+v)y+u^2-uv+v^2)\right) \end{aligned}$$

である((3.2)の証明はページ上部を参照)．(3.2)を y についての多項式と考えこれを(3.1)と比較すると，

$$A=-3uv \quad \text{かつ} \quad B=u^3+v^3 \quad \cdots\cdots (3.3)$$

を満たすような u,v を求めることができれば，あとは(3.2)を用いることで(3.1)の左辺を因数分解することができ，よって(3.1)の解も求められることになる．

そこで，(3.3)を満たす (u,v) を(1つ)求めよう．

◍ $A=0$ のときは，$v=0$ とし，u として $u^3=B$ を満たす $u\in\mathbb{C}$ $(u:=\sqrt[3]{B})$ を取れば(3.3)が成立．

◍ $A\neq 0$ のときは，$A=-3uv\neq 0$ より $u\neq 0$ でなければならないことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
(3.3) &\iff u\neq 0 \text{ かつ } v=-\frac{A}{3u} \text{ かつ } u^3+v^3=B\\
&\iff u\neq 0 \text{ かつ } v=-\frac{A}{3u} \text{ かつ } u^3+\left(-\frac{A}{3u}\right)^3=B\\
&\iff u\neq 0 \text{ かつ } v=-\frac{A}{3u} \text{ かつ } u^6-Bu^3-\frac{A^3}{27}=0\\
&\iff u\neq 0 \text{ かつ } v=-\frac{A}{3u}\\
&\qquad \text{かつ } u^3=\frac{B\pm\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2} \ (\neq 0 \text{ by } A\neq 0)\\
&\iff u^3=\frac{B}{2}\pm\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}} \text{ かつ } v=-\frac{A}{3u}.
\end{aligned}
$$

よって（(u,v) の取り方の1つとして）$u\in\mathbb{C}$ を

$$u^3=\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}}$$

を満たすように取り $\left(u:=\sqrt[3]{\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}}}\right)$，さらに $v:=-\frac{A}{3u}$ とおけば，(3.3)が成立する．

（注 $\sqrt{\frac{B^2}{4}}$ は $\frac{B}{2}$ を表すと約束することにすれば，この u,v の公式は $A=0, B\neq 0$ のときもそのまま通用する．$A=B=0$ のときは…… 無理に含める必要はないであろう．）

最後に，(3.3)を満たす $u,v\in\mathbb{C}$ を用いて，(3.1)の解を具体的に求めよう．(3.2)と(3.3)により，

$$
\begin{aligned}
(3.1) &\iff (y+u+v)(y^2-(u+v)y+u^2-uv+v^2)=0\\
&\iff y=-u-v \text{ または } y^2-(u+v)y+u^2-uv+v^2=0.
\end{aligned}
$$

後者の2次方程式の解を求めると

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{u+v}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(u+v)^2-4(u^2-uv+v^2)}\\
&=\frac{u+v}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3u^2+6uv-3v^2}\\
&=\frac{u+v}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3(u-v)^2}=\frac{u+v}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i(u-v)\\
&=\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)u+\left(\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)v\\
&=-\omega^2u-\omega v,\ -\omega u-\omega^2 v
\end{aligned}
\quad
\left(\begin{aligned}\omega&:=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\&=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\\&=\omega_3\end{aligned}\right).
$$

以上で，次の公式が得られた：

$y^3+Ay+B=0$ の解の公式（Cardanoの公式）
$y=-u-v,\ -\omega^2u-\omega v,\ -\omega u-\omega^2v$,
ただし $A\neq 0$ または $B\neq 0$ と仮定し，$\omega:=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,
$u:=\sqrt[3]{\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}}}$，$v:=-\frac{A}{3u}$ と定める．

4次方程式の解の公式（Ferrariの方法）について

4次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a,b,c,d\in\mathbb{C})$$

の解の公式の求め方についても簡単に紹介しておく．

3次方程式の場合と同様，変数変換 $y=x+\frac{a}{4}$ を行うことで，上の4次方程式の左辺は

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=y^4+Ay^2+By+C$$

（A,B,C は a,b,c,d の具体的な多項式で表せる複素数）と，y^3 の項を含まない形に変形できることが分かる（このことの証明は演習問題とする）．そこで $y^4+Ay^2+By+C=0$，すなわち

$$y^4=-Ay^2-By-C \quad\cdots\cdots(3.4)$$

の解の公式を求めればよい．

さて(3.4)について，全体を因数分解できる形に持ち込むために，$z\in\mathbb{C}$ を取り(3.4)の両辺に $zy^2+\frac{z^2}{4}$ を加えると，

$$\left(y^2+\frac{z}{2}\right)^2=(z-A)y^2-By+\frac{z^2}{4}-C \quad\cdots\cdots(3.5)$$

となる．ここでもし(3.5)の右辺の y についての(高々)2次式が（yの(高々)1次式$)^2$ の形になるのであれば，(3.5)は因数分解により2つの2次方程式に帰着し，解ける．そのような形となるための必要十分条件は (3.5)の右辺の2次式としての判別式が0となること，すなわち

$$B^2-4(z-A)\left(\frac{z^2}{4}-C\right)=0 \quad\cdots\cdots(3.6)$$

$$\left(\begin{aligned}&\iff (z-A)(z^2-4C)-B^2=0\\&\iff z^3-Az^2-4Cz+4AC-B^2=0\end{aligned}\right)$$

である．

(3.6)を z についての3次方程式として解くことにより(3.6)を満たす $z\in\mathbb{C}$ を(1つ)求める（これはCardanoの公式により可能）と，(3.5)は実際に

$$\left(y^2+\frac{z}{2}\right)^2-(Dy+E)^2=0$$

（D,E は z,A,B,C の具体的な式で書ける複素数）の形になるので，因数分解して得られる2つの2次方程式を解くことで，(3.5)すなわち(3.4)が解けたことになる．

注意 5次以上の方程式は，n 乗根を取る操作を有限回行うことにより解の公式を得ることが不可能であることが知られている（Abel(1826)の定理）．

§4. Stirling(スターリング)の公式

中学・高校数学でおなじみの
階乗 $n! = n\cdot(n-1)\cdots\cdots 2\cdot 1$
は，nが大きくなると次のように急速に大きくなる：
$0!=1$, $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$,
$4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, $7!=5040$,
$8!=40320$, $9!=362880$,
$10!=3628800$, $11!=39916800$, ……….

素朴な疑問 nが大きくなるとき，$n!$は
(具体的には)どれくらい速く大きくなる？

この疑問に答えるのが次の公式である：

Stirling(スターリング)の公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}=1$,

ただしeは次の極限値である：
$$e := \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \quad\cdots\cdots(4.1)$$

注意 (4.1)の極限値が存在することは全く自明ではなく，厳密に証明するにはかなりの労力を要する。ここでは(4.1)の極限値の存在は証明なしで認めて，話を先に進めることにする。

本§では，「$\alpha\geqq 1$なる$\alpha\in\mathbb{R}$が存在して$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}=\alpha$」であることを証明する(以下の定理4.7)。そのための準備として，eの性質や指数関数・対数関数の微分積分についての基本事項を以下にまとめる。

命題4.1 $2\leqq e\leqq 3$.

証明 nを正の整数とする。
$$2\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq 3 \quad\cdots\cdots(4.2)$$
であることを示せば，(4.2)で$n\to\infty$とすることで主張が得られる。そこで(4.2)を示せばよい。2項定理により
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \quad\cdots\cdots(4.3)$$
であるが，(4.3)の右辺の和の各項は正であり，従って
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq \sum_{k=0}^{1} {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+n\cdot\frac{1}{n}=2.$$
一方，$1\leqq k\leqq n$なる整数kに対し
$$ {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq \frac{n\cdot n\cdots\cdots n}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{1}{k!}$$
であるので，(4.3)と合わせると
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad\cdots\cdots(4.4)$$
となる。(4.4)と
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leqq 3$$
である(これの証明は演習問題とする)ことを合わせて$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq 3$を得る。 ■

注意4.2 実は次のことが証明できる：
$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2.718281828\cdots.$$

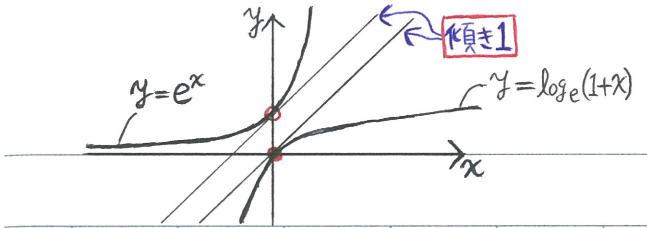
補題4.3 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

証明 (1) 対数関数の基本性質
「$a\in\mathbb{R}$, $x>0 \Rightarrow \log_e(x^a)=a\cdot\log_e x$」
を用いて変形した後，(4.1)と$\log_e$の連続性を用いると
$$\frac{\log_e(1+x)}{x} = \log_e\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \xrightarrow[(4.1)]{x\to 0} \log_e e = 1.$$

(2) 0でない実数xに対し，命題4.1より$e>1$なので$e^x\neq 1$，従って$e^x-1\neq 0$であり，また指数関数の連続性により$\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x-1)=e^0-1=0$.
そして$x=\log_e(e^x)=\log_e((e^x-1)+1)$であるので，
$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-1}{\log_e((e^x-1)+1)} = \left(\frac{\log_e((e^x-1)+1)}{e^x-1}\right)^{-1} \xrightarrow[\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0 \text{と}(1)]{x\to 0} 1^{-1}=1.$$ ■

注意4.4 補題4.3は
「$y=\log_e(1+x)$ および $y=e^x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きが$\boxed{1}$である」
ということを言っている。



※claim:(今から証明しようとしている)主張, という意味.

命題4.5 (1) $(\log_e x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$.
(2) $(x\log_e x - x)' = \log_e x$ $(x>0)$.
(3) $(e^x)' = e^x$ $(x\in\mathbb{R})$.

証明 (1) $x>0$とし, $h\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$, $h>-x$とすると

$$\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h} = \frac{\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} \xrightarrow[\text{補題4.3-(1)}]{h\to 0} \frac{1}{x}\cdot 1$$

となり, これは $\log_e$ が x において微分可能でその微分係数が $\frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$ であることを意味する.

(2) $x>0$とし, $h\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$, $h>-x$ とすると

$$\frac{(x+h)\log_e(x+h)-(x+h)-(x\log_e x - x)}{h}$$
$$= \frac{1}{h}\left(x(\log_e(x+h)-\log_e x)+h\log_e(x+h)-h\right)$$
$$= \frac{\log_e(1+h/x)}{h/x}+\log_e(x+h)-1$$
$$\xrightarrow[\text{補題4.3-(2)}]{h\to 0} 1+\log_e(x+0)-1 = \log_e x.$$

(3) 演習問題とする. ■

定義4.6 $x>0$ に対し, eを底とするxの対数 $\log_e x$ を xの自然対数といい, (数学では)底eを省略してこれを単に $\log x$ と書き表す.

注意 (数学以外の)自然科学では, 自然対数 $\log_e x$ を $\ln x$ と書き, $\log x$ は常用対数 $\log_{10} x$ を意味するのが普通である.

さて, 命題4.5を用いて我々の目標である次の定理を証明しよう.

定理4.7 $\alpha\geq 1$ であるような $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} = \alpha.$$

注意4.8 Stirlingの公式によれば $\alpha=\sqrt{2\pi}$ であるが, これについては別途証明が必要である. 次の§でこうなる「理由」を説明する.

定理4.7の証明

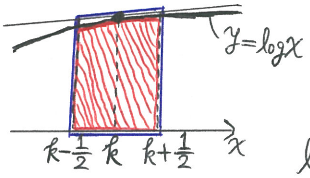
正の整数nに対し $a_n := \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}$ とおく.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}e^{-n-1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdots(4.5)$$

であることに注意する.

claim1 $\log a_n = \log(n!)-(n+\frac{1}{2})\log n + n > 0.$

∵ 正の整数 k に対し, 図の の面積はその周りの線分からなる台形 の面積 $\log k$ よりも小さいので



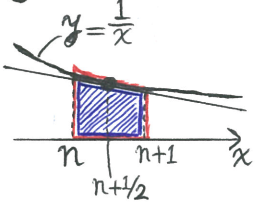
$$\log k \geq \int_{k-1/2}^{k+1/2}\log x\,dx.$$

この不等式の両辺を $k=1,2,\cdots,n$ について加え, 命題4.5-(2)より $(x\log x - x)'$ であることに注意して計算すると

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n}\log k \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1/2}^{k+1/2}\log x\,dx$$
$$= \int_{1/2}^{n+1/2}\log x\,dx = \left[x\log x - x\right]_{1/2}^{n+1/2}$$
$$= (n+\tfrac{1}{2})\log(n+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\log 2 - n$$
$$> (n+\tfrac{1}{2})\log n - n. \quad // \text{(claim1)}$$

claim2 $\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \overset{(4.5)}{=} (n+\frac{1}{2})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-1 \geq 0.$

∵



図の の面積は, その内部にある線分からなる台形 の面積 $\frac{1}{n+1/2}$ よりも大きいので, 命題4.5-(1)より $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることに注意して計算すると

$$\frac{1}{n+1/2} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = \left[\log x\right]_n^{n+1} = \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

従って $(n+1/2)\log\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 1. \quad // \text{(claim2)}$

よって任意の正の整数nに対し, claim1より $a_n > e^0 = 1$ であり, また claim2 より $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq e^0 = 1$, すなわち $a_n \geq a_{n+1}$ である. 下に有界な単調非増加列は収束するので, $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることが分かり, さらに $a_n > 1$ において $n\to\infty$ とすることで $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 1$ が得られる. ■

§5. ランダムウォークに対する中心極限定理

整数の全体 $\mathbb{Z}$ の上を，次の規則に従ってランダムに動く粒子を考える：

- 時刻0においては原点0にいる(0を出発).
- 時刻 $n+1$ における粒子の位置 S_{n+1} は，時刻 n における位置 S_n の隣接点 $S_n \pm 1$ から確率 $\frac{1}{2}$ ずつでランダムに選ばれる.
- 各時刻 n における S_n から(S_{n+1} へ)の移動の方向は互いに独立に決まる.

このようにして決まる粒子のランダムな運動 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ のことを(1次元)単純ランダムウォーク(simple random walk, SRW)という.

各正整数 n に対し $X_n := S_n - S_{n-1}$ とおくと，

- $\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[X_n = -1] = \frac{1}{2}$
- $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに独立な確率変数の列
- $S_0 = 0$. また，各 $n \geq 1$ に対し
$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

素朴な疑問

(1) S_n は(平均して)出発点0からどの程度離れている？

(2) 与えられた時刻 n に S_n が原点0にいる確率 $\mathbb{P}[S_n = 0]$ は(どの程度の大きさか)？

(3) より一般に，$\mathbb{P}[S_n = z]$ は z の関数としてどのようなものか？(S_n の確率分布の様子は？)

(4) $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ は時刻1以降に必ず再度原点0に戻ってくる？それとも戻ってこないことがあり得る？

本§と次の§6で，上記の問に(なるべく厳密に)答える.

☆「離散的な」値を取る確率変数 X に対し，その期待値(または平均) $\mathbb{E}[X]$ を次で定める：
$$\mathbb{E}[X] := \sum_{z} z \cdot \mathbb{P}[X = z] \quad \text{------------} (5.1)$$

期待値について，次の性質は基本的である.

命題5.1 X, Y を「離散的な」値を取る確率変数，$a \in \mathbb{R}$ とする. このとき：

(1) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

(2) $\mathbb{E}[aX] = a \cdot \mathbb{E}[X]$.

証明

(1) $X+Y$ の取り得る値の全体も「離散的」であり，
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_{z} z \cdot \mathbb{P}[X+Y = z] \\
&= \sum_{z} z \cdot \sum_{(x,y):\, x+y=z} \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\
&= \sum_{z} \sum_{(x,y):\, x+y=z} z \cdot \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\
&= \sum_{x} \sum_{y} (x+y) \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\
&= \sum_{x} x \cdot \sum_{y} \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\
&\quad + \sum_{y} y \cdot \sum_{x} \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\
&= \sum_{x} x \cdot \mathbb{P}[X = x] + \sum_{y} y \cdot \mathbb{P}[Y = y] \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

(2) $a = 0$ のときは主張の等式は両辺とも明らかに0に等しいので，成り立つ. $a \neq 0$ のときは，z が X の取り得る値の全体をくまなく動くとき az は aX の取り得る値の全体をくまなく動くので，
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[aX] &= \sum_{z} (az) \cdot \underbrace{\mathbb{P}[aX = az]}_{= \mathbb{P}[X = z]} \\
&= a \sum_{z} z \cdot \mathbb{P}[X = z] = a \cdot \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$
■

注意5.2 X が無限通りの値を取り得るときには(5.1)の右辺は無限級数(n 項の和の $n \to \infty$ での極限)であり，それが有限の値に収束するかどうかは自明でない.
(収束しないときには，X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ は定義できない.)

命題5.3 1次元SRW $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し次が成り立つ.

(1) 任意の $n \geq 1$ に対し $\mathbb{E}[S_n] = 0$.

(2) 任意の $n \geq 1$ に対し $\mathbb{E}[S_n^2] = n$.

証明

(1) $1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k に対し
$$\mathbb{E}[X_k] = 1 \cdot \mathbb{P}[X_k = 1] + (-1) \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1-1}{2} = 0$$
であるので，命題5.1-(1)により
$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = n \cdot 0 = 0.$$

(2) 演習問題とする. ■

注意5.4 $\mathbb{E}[|S_n|]$を計算したり不等式により評価したりするのはそう容易ではない(のでここでは扱わない).

命題5.3-(2)より $\mathbb{E}[S_n^2]=n$ なので, $|S_n|$は平均して$\sqrt{n}$程度(以上以下)の大きさであると言うことができる(素朴な疑問(1)).

次に素朴な疑問(2),(3)について考えよう.

命題5.5 nを正の整数とする.

(1) jを整数とする. このとき, jが奇数 または $|j|>2n$ ならば $\mathbb{P}[S_{2n}=j]=0$.

(2) $-n\leq j\leq n$であるような任意の整数jに対し

$$\mathbb{P}[S_{2n}=2j]=\frac{(2n)!}{(n+j)!(n-j)!}2^{-2n}. \quad \cdots\cdots(5.2)$$

証明 (1) nを正の整数とする. このとき3角不等式より

$$|S_{2n}|=\left|\sum_{k=1}^{2n}X_k\right|\leq\sum_{k=1}^{2n}|X_k|=2n\cdot 1=2n$$

であるので, $|j|>2n$ ならば $\mathbb{P}[S_{2n}=j]=0$ である.

さて, kを$0\leq k\leq 2n$なる整数とし, $X_1,\cdots,X_{2n}$のうちちょうどk個が1に等しいとすると, このとき残りの$(2n-k)$個は-1に等しく, 従って

$$S_{2n}=k\cdot 1+(2n-k)(-1)=2k-2n \quad \cdots\cdots(5.3)$$

である. 特にS_{2n}は必ず偶数であり, よってjが奇数ならば $\mathbb{P}[S_{2n}=j]=0$.

(2) (1)と同様にkを$0\leq k\leq 2n$なる整数とし, $X_1,\cdots,X_{2n}$のうちちょうどk個が1に等しいとする. jを$-n\leq j\leq n$なる整数とするとき, (5.3)により

$$S_{2n}=2j\Leftrightarrow 2j=2k-2n\Leftrightarrow k=n+j$$

であるので,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_{2n}=2j]&=\mathbb{P}[X_1,\cdots,X_{2n}\text{のうちちょうど}(n+j)\text{個が}1]\\&={}_{2n}C_{n+j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(n+j)}\\&=\frac{(2n)!}{(n+j)!(n-j)!}2^{-2n}.\end{aligned}$$

■

(5.2)は具体的ではあるが, 階乗を(3つも)含むため どの程度大きいのか はこのままではよく分からない. そこでこれを 定理4.7(Stirlingの公式)を適用することにより調べてみる: $|j|\leq\frac{n}{2}$ でnが十分大きいとき,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_{2n}=2j]&=\frac{(2n)!}{(n+j)!(n-j)!}2^{-2n}\\&\underset{n\to\infty}{\overset{\text{定理4.7}}{\approx}}\frac{\cancel{\alpha}\sqrt{2n}\,(2n/\cancel{e})^{2n}\cdot\cancel{2^{-2n}}}{\cancel{\alpha}\sqrt{n+j}\left(\frac{n+j}{\cancel{e}}\right)^{n+j}\cdot\alpha\sqrt{n-j}\left(\frac{n-j}{\cancel{e}}\right)^{n-j}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{n}\cdot n^{2n}}{\sqrt{n+j}\,(n+j)^{n+j}\sqrt{n-j}\,(n-j)^{n-j}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left(1-\frac{j^2}{n^2}\right)^{-n}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{-j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{j}\sqrt{\frac{n}{n^2-j^2}}\\&\overset{r:=j/\sqrt{n}}{=}\frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{n}}\left(1-\frac{r^2}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{-r\sqrt{n}}\left(1-\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{r\sqrt{n}}\left(1-\frac{r^2}{n}\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

n:十分大, $r=j/\sqrt{n}$ が有界な範囲に留まる限り

$$\approx\frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{n}}e^{r^2}e^{-r^2}e^{-r^2}(1-0)^{-1/2}=\frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{n}}e^{-j^2/n} \quad \cdots\cdots(5.4)$$

となる.

従って特に, $j=0$ $(r=0)$のときを考えることで次を得る.

定理5.6

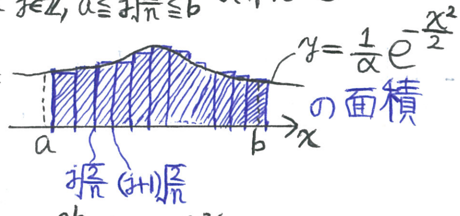
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}[S_{2n}=0]}{n^{-1/2}}=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}.$$

(←素朴な疑問(2))

さらにS_{2n}の分布具合については, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とすると(5.4)により, nが十分大きいとき

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[a\leq\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}}\leq b\right]\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z},\ a\sqrt{2n}\leq 2j\leq b\sqrt{2n}}\mathbb{P}[S_{2n}=2j]\\&\underset{n:\text{十分大}}{\overset{(5.4)}{\approx}}\sum_{j\in\mathbb{Z},\ a\leq j\sqrt{\frac{2}{n}}\leq b}\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{n}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(j\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2}\end{aligned}$$

=



$$\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b\frac{1}{\alpha}e^{-x^2/2}dx. \quad \cdots\cdots(5.5)$$

$|S_{2n}|$が$\sqrt{n}$の程度よりはるかに大きい確率は小さい(はずな)ので, (5.5)でさらに $a\to-\infty$, $b\to\infty$ とするとその値は1に収束する(はず). すなわち

$$\alpha=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}e^{-x^2/2}dx$$

($=\sqrt{2\pi}$であることが示せる)

であり, これと(5.5)から次の定理が成り立つことが(大体)分かったことになる(素朴な疑問(3)に対する1つの答):

定理5.7 (ランダムウォークに対する中心極限定理) $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$を1次元単純ランダムウォークとし, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[a\leq\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}}\leq b\right]=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $(x>0)$ の証明

$x>0$ とし, $h\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$, $h>-x$ とすると

$$h^{-1}(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}) = h^{-1}\left((\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2\right)\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})^{-1}$$
$$= (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})^{-1} \xrightarrow[h\to 0]{} (\sqrt{x+0}+\sqrt{x})^{-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2}. \blacksquare$$

§6. ランダムウォークの再帰性・過渡性

$\{S_n\}_{n=0}^\infty$ を1次元単純ランダムウォークとする. この§では, 次の疑問(§5の素朴な疑問(4))に答える:

素朴な疑問 $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ は時刻1以降に必ず再度原点0に戻ってくる? それとも戻ってこないことがあり得る?

そのために, 次の確率変数($\{S_n\}_{n=0}^\infty$ を通して決まるランダムな値) V を考える:

$$V := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{0\}}(S_n) \left(= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)\right).$$

ここで $\mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ は「$x=0$ のときは1, $x\neq 0$ のときは0」で定義される x の関数を表す. 従って $\mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)$ は「$S_n=0$ であるようなnに対しては1, 他のnに対しては0」となり, 特に V は

「$\{S_n\}_{n=0}^\infty$ の, 原点0への総到達回数」

に等しい.

さて, 上記の素朴な疑問は「$V=1$ となることはあり得ないのか, それともあり得るのか」と言い換えることができるが ($\mathbb{1}_{\{0\}}(S_0)=\mathbb{1}_{\{0\}}(0)=1$ に注意), 実はこれについて次が成り立つ:

定理6.1 $\mathbb{P}[V=\infty]=1$. すなわち, 1次元単純ランダムウォークが何回でも原点0に戻ってくる確率は1である.

定理6.1のような性質を持つランダムウォークは再帰的(recurrent)であるという. 従って定理6.1は

「1次元単純ランダムウォークは再帰的である」

と述べることができる.

以下, 定理6.1の証明を行う. 次の補題が必要になる:

補題6.2 $\mathbb{E}[V]=\infty$.

証明 期待値の性質(命題5.1-(1)と命題5.5-(1)) および定理5.6により, 正の実数 c を適切に取れば

$$\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}\left[\textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)\right]$$
$$\overset{\text{命題5.1(1)}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)]$$
$$= \textstyle\sum_{n=0}^\infty (0\cdot\mathbb{P}[S_n\neq 0]+1\cdot\mathbb{P}[S_n=0])$$
$$= \textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}[S_n=0]$$
$$\overset{\text{命題5.5-(1)}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}[S_{2n}=0]$$
$$\overset{\text{定理5.6}}{\geq} \textstyle\sum_{n=1}^\infty cn^{-1/2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N cn^{-1/2}$$
$$\geq \lim_{N\to\infty}\int_1^{N+1} cx^{-1/2}dx = \lim_{N\to\infty}[2c\sqrt{x}]_1^{N+1}$$
$$= \lim_{N\to\infty}(2c\sqrt{N+1}-2c) = \infty.$$

ただし, 積分の計算に $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}$ $(x>0)$ であることを用いた(証明はページ上部参照). よって $\mathbb{E}[V]=\infty$. $\blacksquare$

注意6.3 上の補題6.2の証明中の変形

$$\mathbb{E}\left[\textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)\right] = \textstyle\sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0\}}(S_n)] \quad \cdots\cdots (6.1)$$

では, 無限和 $\sum_{n=0}^\infty$ が関係しているため命題5.1-(1)を用いるだけでは実は不十分である. (6.1)を厳密に正当化するためには測度論における単調収束定理が必要になる.

定理6.1の証明

「$\{S_n\}_{n=0}^\infty$ が時刻1以降に原点0に(最低1回は)戻ってくる」という事象を事象Aと呼ぶこととし, 事象Aの確率を q とおく. $V=1$ となるのはちょうどAが起きない場合に他ならないので, $\mathbb{P}[V=1]=1-q$. より一般に, 正の整数 k に対し, $V=k$ となるのはちょうどAが$(k-1)$回起きその後Aが起きない場合であるから

$$\mathbb{P}[V=k] = q^{k-1}(1-q). \quad \cdots\cdots (6.2)$$

さて, $q<1$ と仮定する(背理法). このとき(6.2)により

$$\mathbb{P}[V<\infty] = \textstyle\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[V=k] = \sum_{k=1}^\infty q^{k-1}(1-q)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\textstyle\sum_{k=1}^N q^{k-1}(1-q)$$
$$= \lim_{N\to\infty} 1\cdot\frac{1-q^N}{\cancel{1-q}}\cdot\cancel{(1-q)} = 1,$$

特に $\mathbb{P}[V=\infty]=1-\mathbb{P}[V<\infty]=0$ であり, 従って

$$\mathbb{E}[V] = \textstyle\sum_{k=1}^\infty k\cdot\mathbb{P}[V=k]$$
$$= \textstyle\sum_{k=1}^\infty kq^{k-1}(1-q) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N kq^{k-1}(1-q)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-q^N}{1-q}-Nq^N\right) = \frac{1}{1-q} < \infty \quad \cdots\cdots (6.3)$$

となる. これは補題6.2に反し矛盾であるので, $q=1$ でなければならないことになる. すると再度(6.2)より

$$\mathbb{P}[V<\infty] = \textstyle\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[V=k] = \sum_{k=1}^\infty q^{k-1}(1-q) = 0$$

となるので, $\mathbb{P}[V=\infty]=1-\mathbb{P}[V<\infty]=1-0=1$. $\blacksquare$