# 確率論I　講義ノート

梶野　直孝

神戸大学理学部数学科

## §0. 序

▷サイコロを1つ投げる. 出目 $X\in\{1,2,3,4,5,6\}$

● $X$ は「確率変数」, 各目の出る確率 $\frac{1}{6}$:
　$\forall k\in\{1,\cdots,6\}$, $\mathbb{P}[X=k]=\frac{1}{6}$.

● 他の「事象」の「確率」: 例えば
　$\mathbb{P}[X$は奇数$]=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}[X$は3の倍数$]=\frac{1}{3}$.

問題1 「確率変数」「確率」「事象」とは何か?
(数学的に厳密な定義が必要!)

▷サイコロを無限回投げる, $n$回目の出目 $X_n$

● 経験的に次が成り立つ(大数の法則):

(0.1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\mathbb{E}[X]$ ← $X$の「平均」(「期待値」)
　$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{6}(1+\cdots+6)=7/2$.

問題2 (0.1)が成り立つ(はずな)のは何故か?
~~答 我々の経験による.~~

この講義の目標: 問題1, 2 に $\boxed{\text{数学的に厳密に}}$ 答えること!

### 「確率」を厳密に定式化するには?

▷$\Omega$: 起こり得る全ての「場合」の集まり

▷各 $\Omega_0\subset\Omega$ に対し $\mathbb{P}[\Omega_0]\in[0,1]$ を対応させる($\Omega_0$の「確率」)

▷「確率変数」$X$ は, 各「場合」$\omega\in\Omega$ に「出目」$X(\omega)\in\mathbb{R}$ を対応させる …… $X$ は $\Omega$ 上の関数: $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

例 サイコロ1投: $\begin{cases}\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\\ \mathbb{P}[A]=\frac{\#A}{6},\ A\subset\Omega\ (\#A:\ A\text{の元の個数})\\ X:\Omega\to\mathbb{R},\ X(k)=k,\ \forall k\in\Omega.\end{cases}$

▷「事象」$A$ は, 各「場合」$\omega\in\Omega$ ごとに, 起きるか起きないかの2つに1つ.
$\Omega_A:=\{\omega\in\Omega\mid$「場合」$\omega$ のとき $A$ が起こる$\}$
とおくと, 「$A$が起きる確率」=「$\Omega_A$の確率」$=\mathbb{P}[\Omega_A]$.
そこで「事象」$A$ を $\Omega_A$ と同一視する……「事象」とは, $\Omega$の部分集合

例 サイコロ1投では「$X$は奇数」$\Leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)$は奇数$\}=\{1,3,5\}$,
「$X$は3の倍数」$\Leftrightarrow\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)$は3の倍数$\}=\{3,6\}$

さらに $\mathbb{P}$ の満たすべき性質として:

● $\mathbb{P}[\phi]=0$, $\mathbb{P}[\Omega]=1$

● $\{A_n\}_{n=1}^N$: 事象の列, $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$
　$\Rightarrow \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{N}A_n]=\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}[A_n]$
　極限の取り扱いのためには $\boxed{N=\infty}$ が必要! (cf. (0.1))

つまり $\mathbb{P}$ は測度(measure)であるべき!

まとめると: 「確率」の数学的定式化

(1) $\begin{cases}\text{● } \Omega:\text{集合(標本空間)}\\ \text{● 各 } A\subset\Omega \text{ に } \mathbb{P}[A]\ (\text{事象}A\text{の確率})\in[0,1] \\ \quad\text{を対応させる関数 } \mathbb{P}\ (\text{測度})\end{cases}$

(2) $\Omega$上の関数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$
　(確率変数:「ランダムな試行の結果」)

### 記号と基本的事実

▷$A:=B$ は「$A$を$B$で定義する」の意

▷$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

▷集合 $X$ に対し

● $2^X:=\{A\mid A\subset X\}$

● $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset X$ は「各$\lambda\in\Lambda$に対し $x_\lambda\in X$」の意

● $X$: 可算無限 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全単射 $\varphi:\mathbb{N}\to X$ が存在 (例: $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$)

● $X$: 可算 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X$は有限もしくは可算無限

● $X$: 非可算 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X$は可算でない (例: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

● $n\in\mathbb{N}$ で $X_1,\cdots,X_n$ は可算集合 $\Rightarrow X_1\times\cdots\times X_n$ は可算

● 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $A_n$ は可算集合 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ は可算

## §1 測度論からの基本事項

**Def 1.1** ($\sigma$-加法族)
$X$を集合, $\mathcal{M}\subset 2^X$ とする.
$\mathcal{M}$: $X$ の(における) $\sigma$-加法族(完全加法族, $\sigma$-algebra)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ($\sigma$1) $\phi\in\mathcal{M}$
　($\sigma$2) $A\in\mathcal{M}\Rightarrow A^c:=X\setminus A\in\mathcal{M}$
　($\sigma$3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$.

このとき $(X,\mathcal{M})$ は可測空間であるといい,
　各 $A\in\mathcal{M}$ は $X$ の可測集合と呼ばれる.

**Prop1.2** 可測空間 $(X,\mathcal{M})$ に対し:

(1) $X\in\mathcal{M}$.

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$.

(3) $n\in\mathbb{N}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{M}\Rightarrow A_1\cup\cdots\cup A_n,\ A_1\cap\cdots\cap A_n\in\mathcal{M}$.

(4) $A,B\in\mathcal{M}\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{M}$.

(∵ ノート Prop1.2.)

**Def1.3** (拡大実数系 $[-\infty,\infty]$)

(1) $\mathbb{R}$ に $\pm\infty\notin\mathbb{R}$ なる2元 $\infty,-\infty$ を付け加えた集合

$$[-\infty,\infty]:=\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

を拡大実数系という.

$$\forall a\in[-\infty,\infty],\quad -\infty\leqq a\leqq\infty$$

と定めることで $\mathbb{R}$ の順序 $\leqq$ を $[-\infty,\infty]$ に拡張する. (全順序になる)

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,\infty]$ に対し $\lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \forall b\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqq N,\ a_n\gtrless b.$$

(3) $[-\infty,\infty]$ における和と積は自然な方法で定義.

ただし ● $\infty+(-\infty)$, $(-\infty)+\infty$ は定義されない.

● $0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0:=0$ と定義する!

このとき ● 積の交換・結合則

● $[0,\infty]$ における和の交換・結合則, 分配則

が成り立つ. よって $[0,\infty]$ では和と積について普通の計算ができる.

(∵ ノート Prop0.7)

**Prop1.4** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty]\Rightarrow \exists\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\in[0,\infty]$ $\left(=:\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)$

(ノート Def0.9)

**Def1.5** (測度) $(X,\mathcal{M})$ を可測空間とする.

$\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ が $\mathcal{M}$ 上の(あるいは $(X,\mathcal{M})$ 上の)測度 (measure)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ● $\mu(\phi)=0$

● $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$, $A_i\cap A_j=\phi\ (\forall i\neq j)\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

(可算加法的)

このとき3つ組 $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間という.

また $\mu(X)=1$ のとき $\mu$ を確率測度, $(X,\mathcal{M},\mu)$ を確率空間という.

**Prop1.6** $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

(1) $n\in\mathbb{N}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{M}$, $A_i\cap A_j=\phi\ (\forall i\neq j)$

$$\Rightarrow \mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n).$$

(2) $A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B\Rightarrow \mu(A)\leqq\mu(B)$.

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

(4) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\supset A_{n+1}$, $\mu(A_1)<\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

(∵ ノート Prop1.4)

**Prop1.7** $X$ を集合とする.

(1) $\Lambda$ を集合, $\Lambda\neq\phi$ とし, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $\mathcal{M}_\lambda$ は $X$ の $\sigma$-加法族とする. このとき $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_\lambda$ は $X$ の $\sigma$-加法族.

(2) $\mathcal{A}\subset 2^X$ とし,

$$\sigma_X(\mathcal{A}):=\bigcap_{\substack{\mathcal{M}\text{は}X\text{の}\sigma\text{-加法族}\\ \mathcal{A}\subset\mathcal{M}}}\mathcal{M}\quad(1.3)$$

とおく. このとき $\sigma_X(\mathcal{A})$ は, $X$ の $\sigma$-加法族で $\mathcal{A}$ を含むもののうち最小のものである. ($\sigma_X(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ によって生成される $X$ の $\sigma$-加法族という.) ($\sigma_X(\mathcal{A})$ を単に $\sigma(\mathcal{A})$ とも書く.)

∵ (ノート Prop1.7)

(1) $\mathcal{M}:=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_\lambda$ が Def1.1 の $(\sigma1),(\sigma2),(\sigma3)$ を満たすことを示す.

$(\sigma1)$: $\forall\lambda\in\Lambda$, $\phi\in\mathcal{M}_\lambda$ (∵ $\mathcal{M}_\lambda$ の$(\sigma1)$). ∴ $\phi\in\mathcal{M}$.

$(\sigma2)$: $A\in\mathcal{M}$ とすると $\forall\lambda\in\Lambda$, $A\in\mathcal{M}_\lambda$, よって $(\sigma2)$ より $A^c\in\mathcal{M}_\lambda$. ∴ $A^c\in\mathcal{M}$.

$(\sigma3)$: $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$ とすると $\forall\lambda\in\Lambda$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}_\lambda$ なので $(\sigma3)$ より $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}_\lambda$. ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$.

(2) $2^X$ は $\mathcal{A}\subset 2^X$ なる $X$ の $\sigma$-加法族なので, (1.3) の添字集合は空でない. よって (1.3) 右辺の "$\bigcap$" は定まり, (1) より $\sigma_X(\mathcal{A})$ は $X$ の $\sigma$-加法族. (1.3) より明らかに, $\mathcal{A}\subset\sigma_X(\mathcal{A})$ であり, $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ なる $X$ の $\sigma$-加法族 $\mathcal{M}$ に対し $\sigma_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$. ■

**例1.8** ($\mathbb{R}^d$ の Borel $\sigma$-加法族と Lebesgue 測度) $d\in\mathbb{N}$ とする.

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d):=\sigma_{\mathbb{R}^d}(\{U\subset\mathbb{R}^d\mid U\text{は}\mathbb{R}^d\text{の開集合}\})$$

を $\mathbb{R}^d$ の Borel $\sigma$-加法族, 各 $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合という.

($U\subset\mathbb{R}^d$ 開 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in U$, $\exists\varepsilon\in(0,\infty)$, $B_d(x,\varepsilon):=\{y\in\mathbb{R}^d\mid |x-y|<\varepsilon\}\subset U$.)

次が知られている (ノート Corollary 2.28):

$\exists_1 m_d$: $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の測度, $\forall[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ d次元閉区間,

$$m_d([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d])=(b_1-a_1)\cdot\cdots\cdot(b_d-a_d).$$

$m_d$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度という. (d=1: 長さ d=2: 面積 d=3: 体積)

**Prop 1.9** $d \in \mathbb{N}$ とし,

$\mathcal{J}_d := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \mid {}^{\forall}k \in \{1, \dots, d\}$ に対し $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ a_k \leqq b_k\} \cup \{\phi\}$,

$\mathcal{J}_d^{\mathbb{Q}} := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \mid {}^{\forall}k \in \{1, \dots, d\}$ に対し $a_k, b_k \in \mathbb{Q},\ a_k \leqq b_k\} \cup \{\phi\}$

可算!

とおく. このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{J}_d) = \sigma(\mathcal{J}_d^{\mathbb{Q}})$.

(∵ ノート Prop 1.9)

## 可測関数と単関数

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする.

**Def. 1.10** (可測関数) 「期待値(平均)が定義できる」関数!

$f : X \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{M}$-可測

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \underbrace{f^{-1}(A)}_{=\{x \in X \mid f(x) \in A\}} \in \mathcal{M}$, かつ $f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}$.

**Prop 1.11** $f : X \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{M}$-可測

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}a \in \mathbb{Q},\ f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow {}^{\forall}a \in \mathbb{R},\ f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$.

$((a, \infty] := \{x \in [-\infty, \infty] \mid x > a\})$

(∵ ノート Prop 1.14)

**Prop 1.12** $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする.

(1) ${}^{\forall}x \in X$ に対し $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ が定義できる ($\infty + (-\infty)$, $-\infty + \infty$ の形にならない) ならば $f+g : X \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測.

(2) $(fg)(x) := f(x)g(x)$ で定義される $fg : X \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測.

∵ (1) $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$(f+g)^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q} \\ r+s > a}} f^{-1}((r, \infty]) \cap g^{-1}((s, \infty]) \in \mathcal{M}$$

可算!

なので Prop 1.11 より $f+g$ は $\mathcal{M}$-可測.

(2) (1) と本質的に同様だが, ±の符号の問題や「0との積」$= 0$, に注意する必要がある. (ノート Prop 1.15-(2))

■

$X$ 上の $[-\infty, \infty]$-値関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し,

$\sup_{n \geqq 1} f_n$, $\inf_{n \geqq 1} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$

を $X$ 上の関数として次で定義:

$\left(\sup_{n \geqq 1} f_n\right)(x) := \sup_{n \geqq 1}\{f_n(x)\}$, $\left(\limsup_{n \to \infty} f_n\right)(x) := \limsup_{n \to \infty}\{f_n(x)\}$,

$\left(\inf_{n \geqq 1} f_n\right)(x) := \inf_{n \geqq 1}\{f_n(x)\}$, $\left(\liminf_{n \to \infty} f_n\right)(x) := \liminf_{n \to \infty}\{f_n(x)\}$.

**注意 1.13** (1) $\pm\infty$ を含めたおかげで, 空でない $A \subset [-\infty, \infty]$ には ($[-\infty, \infty]$ における) 上限 $\sup A$, 下限 $\inf A$ が常に存在. (ノート Prop 0.2)

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty, \infty]$ に対し

$\limsup_{n \to \infty} a_n := \inf_{n \geqq 1}\left(\sup_{k \geqq n} a_k\right)$, $\liminf_{n \to \infty} a_n := \sup_{n \geqq 1}\left(\inf_{k \geqq n} a_k\right)$

をその上極限, 下極限という. (ノート Def. 0.4)

$\lim_{n \to \infty} a_n$ と違って, いつでも存在するので便利!

次が成り立つ:

- $\liminf_{n \to \infty} a_n \leqq \limsup_{n \to \infty} a_n$ (∵ ノート (0.9) の下)
- 極限 $\lim_{n \to \infty} a_n$ が存在 (つまり ${}^{\exists}a \in [-\infty, \infty]$, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$)

  $\Longleftrightarrow \limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n$ ($\leftarrow$ また, このとき $= \lim_{n \to \infty} a_n$)

(∵ ノート Prop 0.5)

**Prop 1.14** 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. このとき $\sup_{n \geqq 1} f_n$, $\inf_{n \geqq 1} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$ も $\mathcal{M}$-可測.

∵ $a \in \mathbb{R}$ に対し $\left(\sup_{n \geqq 1} f_n\right)^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$

なので Prop 1.11 より $\sup_{n \geqq 1} f_n$ は $\mathcal{M}$-可測. $\inf_{n \geqq 1} f_n$ も同様,

$\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$ は $\sup_{n \geqq 1} f_n$, $\inf_{n \geqq 1} f_n$ に対する結果を2回ずつ使えばよい (詳しくは ノート Prop 1.16). ■

**Lemma 1.15** $d \in \mathbb{N}$ とし $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は連続とする. このとき $f$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測である.

∵ $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ とおくと

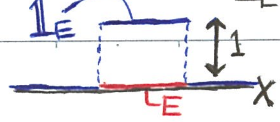
- $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ の $\sigma$-加法族 (易しい)
- $\{\mathbb{R}$ の開集合$\} \subset \mathcal{A}$ である. 実際 $U \underset{開}{\subset} \mathbb{R}$ とすると $f$ の連続性から $f^{-1}(U) \underset{開}{\subset} \mathbb{R}^d$, 従って $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ となるので $U \in \mathcal{A}$.

以上より, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の最小性から $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, つまり $f$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測. ■

(ノート Lemma 1.17 も参照のこと.)

$E \subset X$ に対し, $1_E : X \to \mathbb{R}$ ($E$ の指示関数 indicator function) を次で定義:

$$1_E(x) := \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$



● $\mathbb{1}_E$: $\mathcal{M}$-可測 $\iff$ $E\in\mathcal{M}$.

(∵)($\Longrightarrow$) $\{1\}\underset{閉}{\subset}\mathbb{R}$ より $\{1\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ なので $E=\mathbb{1}_E^{-1}(\{1\})\in\mathcal{M}$.
($\Longleftarrow$) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し $\mathbb{1}_E^{-1}(A)\in\{\emptyset,E,E^c,X\}\subset\mathcal{M}$.

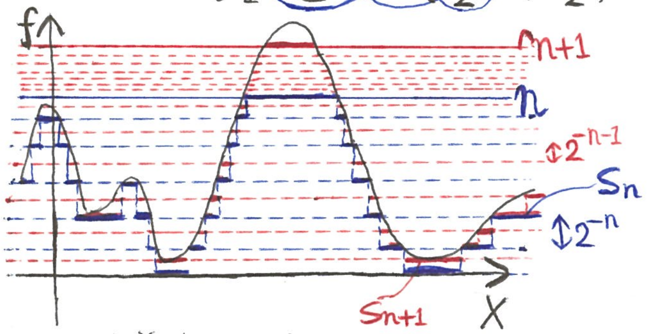
**Def1.16** (単関数)
$s: X\to\mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-単関数 (←$\mathbb{R}$値であることに注意!)
$\overset{def}{\iff}$ $s$ は $\mathcal{M}$-可測であり, その像 $s(X)$ は有限集合
$= \{s(x)\mid x\in X\}$

● $s$: $\mathcal{M}$-単関数
$\iff \exists n\in\mathbb{N}, \{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}, \{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{M}, s=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}$.

(∵)($\Longrightarrow$) $s=\sum_{a\in s(X)} a\cdot\mathbb{1}_{s^{-1}(a)}$.
($\Longleftarrow$) 明らかに $s(X)$ は有限集合, また Prop1.12-(1) より $\mathcal{M}$-可測.

**Prop1.17** $f:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. このとき
$\exists\{s_n\}_{n=1}^\infty$: $\mathcal{M}$-単関数の列, $\forall x\in X$,
(S1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le s_n(x)\le s_{n+1}(x)$.
(S2) $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$.

∵ $s_n := \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n}\frac{i-1}{2^n}\mathbb{1}_{\{\frac{i-1}{2^n}\le f<\frac{i}{2^n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f\ge n\}}$




(S1): 定義 (cf. 上図) より明らか.
(S2): $f(x)<\infty$ なら $\forall n>f(x)$, $f(x)-2^{-n}<s_n(x)\le f(x)$.
$f(x)=\infty$ なら $\forall n\in\mathbb{N}$, $s_n(x)=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty=f(x)$. ■

## 積分と収束定理 (厳密な定義は ノート §1.3を参照)

**Thm1.18** (積分の性質I: 非負関数) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.
(1) (非負単関数の積分) $n\in\mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i=1}^n\subset[0,\infty)$, $\{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{M}$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_X\left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}\right)d\mu=\sum_{i=1}^n a_i\cdot\mu(A_i)}$$

注 $0\cdot\infty:=0$!

(2) (単調性) $f,g:X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $X$上 $f\le g$
$\Longrightarrow (0\le)\int_X f\,d\mu\le\int_X g\,d\mu\ (\le\infty)$.
(3) (線型性) $f,g:X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\alpha,\beta\in[0,\infty]$
$\Longrightarrow \int_X(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu$.
(∵ ノート Def1.20〜Prop1.25) 注 $\infty\cdot 0:=0\cdot\infty:=0$!

**Thm1.19** (単調収束定理, Monotone Convergence Thm, MCT)
各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とし,
$\forall x\in X$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$
と仮定する. このとき
$(\lim_{n\to\infty} f_n)(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ ← 注 単調非減少列なので極限は存在し, $\sup_{n\ge1}f_n(x)$ に等しい.
で定義される $\lim_{n\to\infty} f_n: X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測で,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)d\mu}$$

(∵ ノート Thm1.24)

**Prop1.20** 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とするとき,

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_X f_n\,d\mu.$$

∵ 各 $x\in X$ に対し $(\sum_{i=1}^n f_i)(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)$ は $n$ について非減少で, $n\to\infty$ のとき $\sum_{m=1}^\infty f_m(x)=:(\sum_{m=1}^\infty f_m)(x)$ に収束する. (また Prop1.12 より $\sum_{i=1}^n f_i$ は $\mathcal{M}$-可測.) 従って
$\int_X(\sum_{n=1}^\infty f_n)d\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^n f_i)d\mu \underset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty}\int_X(\sum_{i=1}^n f_i)d\mu$
$\underset{線型性}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_X f_i\,d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_X f_n\,d\mu$. ■

**Prop1.21** (Fatouの補題)
各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:X\to[0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とするとき,

$$\int_X\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

∵ $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n$ とする. $X$上 $\inf_{k\ge n}f_k\le f_m$ で, Prop1.14 より $\inf_{k\ge n}f_k(\ge0)$ は $\mathcal{M}$-可測なので Thm1.18(2) より $\int_X(\inf_{k\ge n}f_k)d\mu\le\int_X f_m\,d\mu$. $m(\ge n)$ について inf をとれば $\int_X(\inf_{k\ge n}f_k)d\mu\le\inf_{k\ge n}\int_X f_k\,d\mu$ ……(☆)
ここで $n\to\infty$ とすれば, $\inf_{k\ge n}(\cdots)_k$ は $n$ について非減少で, 従って $n\to\infty$ のとき $\liminf_{n\to\infty}(\cdots)_n$ に収束するので, 左辺は MCT から $\int_X(\liminf_{n\to\infty} f_n)d\mu$ に, 右辺は $\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$ に収束し, よって不等式(☆)から主張が従う. ■

$a\in[-\infty,\infty]$ に対し

$a^+ := \max\{a,0\}$, $a^- := -\min\{a,0\}$

と定める.(このとき容易に $|a| = a^+ + a^-$, $a = a^+ - a^-$)

同様に関数 $f: X\to[-\infty,\infty]$ に対し

$f^+(x) := f(x)^+ = \max\{f(x),0\}$, $f^-(x) := f(x)^- = -\min\{f(x),0\}$

により $f^+, f^-: X\to[0,\infty]$ を定める. このとき

$f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ である.

● $f$ が $\mathcal{M}$-可測なら $f^+, f^-, |f|$ も $\mathcal{M}$-可測!!

(☺ $f^+, f^-$ は Prop1.11から容易. (cf. Prop1.14の証明)
$|f|$ は $|f| = f^+ + f^-$ と Prop1.12-(1) より分かる.)

**Def 1.22** (積分の定義II: $[-\infty,\infty]$-値関数)

(1) $f: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測 に対し:

▷ $\exists\int_X f\,d\mu \overset{def}{\iff} \min\{\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu\} < \infty$.

▷ $\exists\int_X f\,d\mu$ のとき $\boxed{\int_X f\,d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.}$

▷ $f$: $\mu$-可積分 $\overset{def}{\iff} \int_X |f|\,d\mu < \infty$.

(2) $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)$
$:= \{f: X\to\mathbb{R} \mid f$ は $\mathcal{M}$-可測かつ $\mu$-可積分$\}$.

**注意1.23** (1) $f$ が $[0,\infty]$-値のときは, Def1.22-(1)の $\int_X f\,d\mu$ の定義はそれ以前のものに一致. 特に $\exists\int_X f\,d\mu \ge 0$.

(☺ $f^+ = f$, $f^- = 0$ より, $\overset{前}{\int_X} f^+ d\mu - \overset{前}{\int_X} f^- d\mu = \overset{前}{\int_X} f\,d\mu$.)

(2) $f$: $\mu$-可積分 $\iff \exists\int_X f\,d\mu \in\mathbb{R}$.

☺ ($\Leftarrow$) $\exists\int_X f\,d\mu$ より $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ のうち少なくとも1つは $<\infty$. ここで他が $\infty$ と仮定すると $\int_X f\,d\mu$ は $\infty$ か $-\infty$ となり $\int_X f\,d\mu\in\mathbb{R}$ に反する. よって $\int_X f^+ d\mu<\infty$ かつ $\int_X f^- d\mu < \infty$ なので $\int_X |f|\,d\mu = \int_X (f^+ + f^-)\,d\mu \underset{線型性}{=} \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty$.

($\Rightarrow$) $f^\pm \le |f|$ なので $\int_X f^\pm d\mu \underset{単調性}{\le} \int_X |f|\,d\mu < \infty$.

よって $\exists\int_X f\,d\mu$ であり, $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in\mathbb{R}$. ■

**記号** $\int_X f\,d\mu$ を, 次のように変数を明示する形でもよく書く:

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) := \int_X f(x)\,\mu(dx) := \int_X f\,d\mu.$$

同じ意味だが, 確率論では → の方をよく使う.

**Thm 1.24** (積分の性質II: $\overset{[-\infty,\infty]}{\overline{\mathbb{R}}}$-値関数)

(1)(単調性) $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $X$上 $f\le g$, $\exists\int_X f\,d\mu, \exists\int_X g\,d\mu \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

特に, $f: X\to[-\infty,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\exists\int_X f\,d\mu$
$\Rightarrow |\int_X f\,d\mu| \le \int_X |f|\,d\mu$.

(2) $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (線型性)
$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu + \beta\int_X g\,d\mu$.

(☺ ノート Prop1.31)

**Thm 1.25** (Lebesgue(ルベーグ)の収束定理, Dominated Convergence Thm DCT)

各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. 次を仮定:

(L1) $\forall x\in X$, 極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $[-\infty,\infty]$ において存在

(L2) $\exists g: X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測, $\int_X g\,d\mu < \infty$ ($n$に依らない!!),
$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$. ($\underset{単調性}{\Longrightarrow} f_n$: $\mu$-可積分)

このとき $f: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測かつ $\mu$-可積分で

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu} \quad (注\ f = \lim_{n\to\infty} f_n)$$

(☺ ノート Thm1.33)

## 測度0の集合と積分

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

**Def.1.26** (ほとんどすべての(至るところ), Almost everywhere, a.e.)

$A\in\mathcal{M}$ とし, 各 $x\in A$ に対し $S(x)$ を $x$ に関する数学的主張とする. このとき:

$S$ が $\mu$に関して A上ほとんど至るところ成り立つ

($S(x)$ が $\mu$に関してほとんどすべての $x\in A$ に対し成り立つ,
$S$ $\mu$-a.e. on $A$, $\mu$-a.e. $x\in A$ に対し $S(x)$)

$\overset{def}{\iff} \exists N\in\mathcal{M}$, $\mu(N)=0$, $\forall x\in A\setminus N$ に対し $S(x)$ が成立.

($A=X$ のときは「A上」, "on A" を省く.)

**Prop1.27** $f: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする.

(1) $N\in\mathcal{M}$, $\mu(N)=0 \Rightarrow f\cdot 1_N$ は $\mu$-可積分で $\int_X f\cdot 1_N\,d\mu = 0$.

(2) $f$: $\mu$-可積分 $\Rightarrow |f|<\infty$ $\mu$-a.e.

(☺ ノート Prop1.30)

**Prop1.28** $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測で $f=g$ $\mu$-a.e. とする.

このとき $\exists\int_X f\,d\mu \iff \exists\int_X g\,d\mu$, また "$\exists\int_X$" のとき $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

(☺ ノート Prop1.32)

## §2 確率変数とその分布，期待値

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とする（つまり測度空間，$\mathbb{P}[\Omega]=1$）

**Def 2.1** (1) $\Omega$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の標本空間という．

(2) 各 $A\in\mathcal{F}$ を事象といい，$\mathbb{P}[A]$ をその確率という．

(3) 「ほとんど確実に」，"almost surely"，"a.s." は "$\mathbb{P}$-a.e." を意味する．

（$\mathbb{P}$ を明示したいときは，"$\mathbb{P}$-a.s."，「$\mathbb{P}$に関してほとんど…」と書く．）

**Def. 2.2**（確率変数，Random Variable，r.v.）

(1) $\mathcal{F}$-可測関数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ のことを実確率変数（real random variable, real r.v.）という．

(2) $d\in\mathbb{N}$ とする．$X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ について：

$X$：d次元確率変数（d-dim. r.v.）

$\overset{def}{\iff}$ $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\{X\in A\}:=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$.

（普通の写像の記号では $X^{-1}(A)$ と書く）

● 実確率変数 $\iff$ 1次元確率変数（∵ Def 1.10）

**Prop 2.3** $d\in\mathbb{N}$ とし，各 $k\in\{1,\dots,d\}$ に対し $X_k:\Omega\to\mathbb{R}$ とする．$X=(X_1,\dots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$ を $X(\omega):=(X_1(\omega),\dots,X_d(\omega))$ で定める．このとき：

$X$ : d-dim. r.v. $\iff$ $\forall k\in\{1,\dots,d\}$, $X_k$ : real r.v.

∵ ($\Longrightarrow$) $a\in\mathbb{R}$ とすると，$\mathbb{R}\times\cdots\times\underset{k}{(a,\infty)}\times\cdots\times\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合，従って $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の元であるので，$X$ が d-dim r.v. であることから $\mathcal{F}\ni\{X\in\mathbb{R}\times\cdots\times\underset{k}{(a,\infty)}\times\cdots\times\mathbb{R}\}=\{X_k\in(a,\infty)\}$.

つまり $\forall a\in\mathbb{R}$, $X_k^{-1}((a,\infty))\in\mathcal{F}$ なので Prop 1.11 より $X_k$ : $\mathcal{F}$-可測．

($\Longleftarrow$) $\mathcal{A}:=\{A\subset\mathbb{R}^d \mid X^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$ とおく．

● $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^d$ の $\sigma$-加法族

(∵ ($\sigma$1) $X^{-1}(\phi)=\phi\in\mathcal{F}$ より $\phi\in\mathcal{A}$.

($\sigma$2) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow X^{-1}(A^c)=(X^{-1}(A))^c\in\mathcal{F}$. ∴ $A^c\in\mathcal{A}$.

($\sigma$3) $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{A}\Rightarrow X^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\bigcup_{n=1}^\infty X^{-1}(A_n)\in\mathcal{F}$.
∴ $\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{A}$.)

● $\mathcal{I}_d\subset\mathcal{A}$（$\mathcal{I}_d$ の定義は Prop 1.9 参照）

(∵ $X^{-1}([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d])=\bigcap_{k=1}^d X_k^{-1}([a_k,b_k])\in\mathcal{F}$
が，$[a_k,b_k]\in\mathcal{I}_1\underset{\text{Prop1.9}}{\subset}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $X_k$ : real r.v. から分かる.)

よって $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\underset{\text{Prop1.9}}{=}\sigma(\mathcal{I}_d)\subset\mathcal{A}$，ゆえに $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $X^{-1}(A)\in\mathcal{F}$. ■

**Prop 2.4** $d\in\mathbb{N}$ とし，$X$ を d-dim r.v.，$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする．このとき $f(X):=f\circ X:\Omega\to\mathbb{R}$ は real r.v.

∵ $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると $(f(X))^{-1}(A)=(f\circ X)^{-1}(A)=X^{-1}(f^{-1}(A))$ であり，$f$ : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測より，$f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，よって $X^{-1}(f^{-1}(A))\in\mathcal{F}$.

∴ $f(X)^{-1}(A)\in\mathcal{F}$ となり，$f(X)$ は $\mathcal{F}$-可測. ■

● $X$ : d-dim r.v., $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 連続 $\Longrightarrow$ $f(X)$ real r.v.

(∵ Lemma 1.15 より $f$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測なので Prop 2.4 が使える.)

**Def 2.5**（期待値（平均））$X$ を real r.v.（あるいはより一般に $\mathcal{F}$-可測な $X:\Omega\to[-\infty,\infty]$）とする．

▷ $\exists\mathbb{E}[X]\overset{def}{\iff}\exists\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$.

▷ $\exists\mathbb{E}[X]$ のとき $\boxed{\mathbb{E}[X]:=\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}$

$X$ の期待値（平均）

▷ $X$ : 可積分 $\overset{def}{\iff}$ $X$ : $\mathbb{P}$-可積分 $\iff$ $\exists\mathbb{E}[X]\in\mathbb{R}$.

**Def 2.6** $p\in(0,\infty)$ に対し

（注 $|\cdot|^p:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は連続より，$|X|^p$ : real r.v.）

$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}):=\mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{P}):=\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$
$:=\{X \mid X : \text{real r.v.}, \mathbb{E}[|X|^p]<\infty\}$.

● $X,Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$, $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha X, X+Y\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$.

(∵ Prop 1.12 より $\alpha X, X+Y$ は real r.v. であり，
$\mathbb{E}[|\alpha X|^p]=\mathbb{E}[|\alpha|^p|X|^p]\underset{線型性}{=}|\alpha|^p\mathbb{E}[|X|^p]<\infty$. また
$|X+Y|^p\le(|X|+|Y|)^p\le(2\cdot\max\{|X|,|Y|\})^p\le2^p(|X|^p+|Y|^p)$
なので $\mathbb{E}[|X+Y|^p]\underset{単調性}{\le}\mathbb{E}[2^p(|X|^p+|Y|^p)]\underset{線型性}{=}2^p(\mathbb{E}[|X|^p]+\mathbb{E}[|Y|^p])$
$<\infty$.)

**Prop 2.7** (1) $X$ を real r.v. とし，$X$ は a.s. に有界，すなわち $\exists M\in[0,\infty)$, $|X|\le M$ a.s. と仮定する．このとき $\forall p\in(0,\infty)$, $X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$.

(2) $X,Y\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Longrightarrow XY\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $|\mathbb{E}[XY]|^2\le\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$.

特に $X\in\mathcal{L}^2(\mathbb{P})\Rightarrow X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X]^2\le\mathbb{E}[X^2]$.（Cauchy-Schwarz不等式）

∵ (1) $\mathbb{R}\ni x\mapsto\min\{|x|^p,M^p\}\in\mathbb{R}$
は連続関数なので $\min\{|X|^p,M^p\}$ は real r.v. で，仮定より $|X|^p=\min\{|X|^p,M^p\}$ a.s. なので Prop 1.28 より

$\mathbb{E}[|X|^p]=\mathbb{E}[\min\{|X|^p,M^p\}]\underset{単調性}{\le}\mathbb{E}[M^p]\underset{\mathbb{P}[\Omega]=1}{=}M^p<\infty$.

∴ $X\in\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$.

$$\begin{tikzcd}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "f(X)"'] & (\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}\end{tikzcd} \qquad \mathbb{P}_X := \mathbb{P}\circ X^{-1}$$

積分① 積分② Thm 2.10-(2)

(2) $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ とする. $|XY| \leqq \frac{1}{2}(|X|^2+|Y|^2)$ なので

$$\mathbb{E}[|XY|] \underset{\text{単調性}}{\leqq} \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2)\right] \underset{\text{線型性}}{=\!=} \tfrac{1}{2}(\mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[Y^2]) < \infty.$$

よって $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ であり, また $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]=0$ ならこの不等式より

$0 \leqq \mathbb{E}[|XY|] \leqq \frac{1}{2}(0+0)=0$, $|\mathbb{E}[XY]| \leqq \mathbb{E}[|XY|]=0=\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$.

そこで $\mathbb{E}[X^2]>0$ または $\mathbb{E}[Y^2]>0$ と仮定してよい. $\mathbb{E}[X^2]>0$ と仮定し $t := -\frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[X^2]}$ とおくと

$$0 \leqq \mathbb{E}[(tX+Y)^2] = t^2\mathbb{E}[X^2]+2t\mathbb{E}[XY]+\mathbb{E}[Y^2] = -\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[X^2]}+\mathbb{E}[Y^2].$$

$\therefore \mathbb{E}[XY]^2 \leqq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$. $\mathbb{E}[Y^2]>0$ のときも同様. ■

**Def 2.8**(分散・共分散)

(1) Real r.v. $X$ に対しその分散 $var(X)$ を次で定める:

$$var(X) := \begin{cases} \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 & (X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})) \\ \infty & (X \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{P})) \end{cases}$$

(また $\sigma(X) := \sqrt{var(X)}$ を $X$ の標準偏差という.)

(2) $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ に対しその共分散 $cov(X,Y)$ を次で定める:

$$cov(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

**Def 2.9**(確率変数の分布(法則)) $d \in \mathbb{N}$ とし $X$ は d-dim. r.v. とする. 次で定まる $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_X$ (cf. 下の Thm 2.10):

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}\circ X^{-1}(A) := \mathbb{P}[X^{-1}(A)] = \mathbb{P}[X\in A], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

を $X$ の分布(distribution)もしくは法則(law)という.

記号 ● $X$ の分布を $\mathcal{L}(X)$ とも書き表す

($X$ の定義されている確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を表に出したくないとき用いる)

● $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 $\mu$ に対し

$$X \sim \mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L}(X) = \mu.$$

$\mathbb{P}_X$ が測度であること, およびその重要な性質:

**Thm 2.10**(像測度定理; cf. ①-① Thm 1.46) $X$ を d-dim. r.v. とする.

(1) $\mathbb{P}_X$ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度である.

(2) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする. このとき

● $\exists\mathbb{E}[f(X)] \Leftrightarrow \exists\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$,

また "$\exists$" のとき $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$.

☆要約すると: (↑の図も参照のこと)

Def 2.9 …… $X$ で決まる事象の確率についての情報を(全て)寄せ集めたものを「$X$ の分布」$\mathbb{P}_X$ と定義.

Thm 2.10 …… 「$X$ の関数」$f(X)$ の期待値は $\mathbb{P}_X$ による積分として計算できる.

**系 2.10** $X$ を real r.v. とする.

(1) $\exists\mathbb{E}[X] \Leftrightarrow \exists\int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx)$ であり, "$\exists$" のとき

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx).$$

(2)

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathbb{P}_X(dx) \ (\in [0,\infty]).$$

∵ Thm 2.10-(2) を, (1) は $f(x)=x$, (2) は $f(x)=x^2$ として用いればよい. ■

**Thm 2.10 の証明**

(1) $X^{-1}(\phi)=\phi$ なので $\mathbb{P}_X(\phi)=\mathbb{P}[X^{-1}(\phi)]=\mathbb{P}[\phi]=0$.

$X^{-1}(\mathbb{R}^d)=\Omega$ なので $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}^d)=\mathbb{P}[X^{-1}(\mathbb{R}^d)]=\mathbb{P}[\Omega]=1$.

$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は $\forall j \neq k$, $A_j \cap A_k = \phi$ をみたすとすると,

$\{X^{-1}(A_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $\forall j\neq k$, $X^{-1}(A_j)\cap X^{-1}(A_k) = X^{-1}(A_j\cap A_k) = X^{-1}(\phi) = \phi$

であるので

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mathbb{P}\left[X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^\infty X^{-1}(A_n)\right] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[X^{-1}(A_n)] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}_X(A_n).$$

以上より $\mathbb{P}_X$ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度である.

(2) まず, Prop 2.4 より $f(X)$ は real r.v. であったことを思い出そう.

$\boxed{\text{才1段}}$ $\boxed{f = 1_A}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ のとき:

$f(X) = 1_A(X) = 1_{\{X\in A\}}$ であるので

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[1_{\{X\in A\}}] = \mathbb{P}[X\in A] = \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x)\mathbb{P}_X(dx).$$

$\boxed{\text{才2段}}$ $f$ が非負 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-単関数のとき:

$f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$, $a_k \in [0,\infty)$, $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n\in\mathbb{N}$, と書けて

$$\mathbb{E}[f(X)] \underset{\text{線型}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}[1_{A_k}(X)] \underset{\text{才1段}}{=\!=} \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{P}_X(A_k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx).$$

$\boxed{\text{才3段}}$ $f: \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測 のとき:

$f$ に対し Prop 1.17 のように $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-単関数の列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ をとると,

才2段より $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[s_n(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} s_n(x)\mathbb{P}_X(dx)$. そこで

両辺に単調収束定理を用いると

$$(\text{左辺}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx) \xleftarrow{n\to\infty} (\text{右辺}).$$

$\boxed{才4段}$ $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ $([-\infty,\infty])$ のとき:

$(f(X))^{\pm} = f^{\pm}(X)$ なので才3段より $\mathbb{E}[(f(X))^{\pm}] = \int_{\mathbb{R}^d} f^{\pm}(x)\mathbb{P}_X(dx)$.

これより $\min\{\mathbb{E}[(f(X))^+], \mathbb{E}[(f(X))^-]\} = \min\{\int_{\mathbb{R}^d} f^+(x)\mathbb{P}_X(dx), \int_{\mathbb{R}^d} f^-(x)\mathbb{P}_X(dx)\}$

であり, これが $<\infty$ のとき $\pm$ の差をとれば $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$. ■

次の定理は次§で例を扱うための準備である:

<u>Thm 2.11</u> $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

$f: X \to [0,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とし, $\nu: \mathcal{M} \to [0,\infty]$ を

$$\nu(A) := \int_X f \mathbb{1}_A d\mu,\ A\in\mathcal{M} \quad で定める.$$

(1) $\nu$ は $(X,\mathcal{M})$ 上の測度である.

(2) $g: X \to [-\infty,\infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする. このとき

$\exists \int_X g\,d\nu \iff \exists \int_X g\cdot f\,d\mu$ であり,

また "$\exists$" のとき $\int_X g\,d\nu = \int_X g\cdot f\,d\mu$.

<u>Def 2.12</u> Thm 2.11-(1) の $\nu$ を $f\cdot\mu$ で表し, $\mu$ に関して<u>密度 $f$ を持つ</u>測度という. また, $(X,\mathcal{M})$ 上の測度 $\nu$ が $\nu = f\cdot\mu$ を満たすことを $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$ とも書き, このとき $\nu$ は $\mu$ に関して<u>密度 $f$ を持つ</u>という.

特に $(X,\mathcal{M},\mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m_d)$ ($\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度: 例1.8) のときは, 「$\mu$ に関して」を省き, "$\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$" を単に

$$\nu(dx) = f(x)\underbrace{dx}_{m_d(dx)の意味!} \quad のように書く.$$

<u>Thm 2.11 の証明</u>

(1) $\nu(\phi) = \int_X f\cdot\mathbb{1}_\phi d\mu = \int_X f\cdot 0\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = 0$.

$\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, $\forall k\neq j$, $A_k\cap A_j = \phi$ とすると, 各 $x\in\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ に対しては $x\in A_{n(x)}$ となる $n(x)\in\mathbb{N}$ が唯1つ存在し, 従って $f\cdot\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = \sum_{n=1}^\infty f\mathbb{1}_{A_n}$ が成り立つ. よって

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \int_X f\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} d\mu = \int_X \sum_{n=1}^\infty f\mathbb{1}_{A_n} d\mu$$

$$\overset{\text{Prop1.20}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_X f\mathbb{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

よって $\nu$ は $(X,\mathcal{M})$ 上の測度である.

(2) Thm 2.10-(2) の証明にならう.

($\boxed{才1段}$ $g = \mathbb{1}_A$, $A\in\mathcal{M}$ のとき: $\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A d\nu$ より明らか.)

$\boxed{才2段}$ $g$ が非負 $\mathcal{M}$-単関数のとき:

$g = \sum_{k=1}^n a_k\mathbb{1}_{A_k}$, $a_k\in[0,\infty)$, $A_k\in\mathcal{M}$, $n\in\mathbb{N}$ と書けて,

$$\int_X g\,d\nu = \sum_{k=1}^n a_k\nu(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k\int_X f\mathbb{1}_{A_k}d\mu$$

$$\overset{線型性}{=} \int_X \sum_{k=1}^n a_k f\mathbb{1}_{A_k}d\mu = \int_X g\cdot f\,d\mu.$$

$\boxed{才3段}$ $g: X\to[0,\infty]$ $\mathcal{M}$-可測 のとき:

$g$ に対し <u>Prop 1.17</u> のように $\mathcal{M}$-単関数の列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ をとると, 才2段より

$$\int_X s_n d\nu = \int_X s_n\cdot f\,d\mu$$

$$\downarrow\ (n\to\infty, \text{MCT})\ \downarrow \quad (下の注意2.13参照)$$

$$\int_X g\,d\nu = \int_X g\cdot f\,d\mu.$$

$\boxed{才4段}$ $g: X\to[-\infty,\infty]$ のとき:

$(g\cdot f)^{\pm} = g^{\pm}\cdot f$ なので才3段より $\int_X g^{\pm}d\nu = \int_X (g\cdot f)^{\pm}d\mu$.

よって $\min\{\int_X g^+d\nu, \int_X g^-d\nu\} = \min\{\int_X (g\cdot f)^+d\mu, \int_X (g\cdot f)^-d\mu\}$

であり, これが $<\infty$ のとき $\pm$ の差をとれば $\int_X g\,d\nu = \int_X g\cdot f\,d\mu$. ■

<u>注意2.13</u> 上の Thm 2.11 の証明・才3段では $\forall x\in X$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x)f(x) = g(x)f(x)$ であることを用いた. これは次の事実から従う:

● $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty]$ が $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\le a_{n+1}$ かつ $b_n\le b_{n+1}$ を満たすとき $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$.

(☺ 0-1 Prop 0.7-(2); なおこのとき $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ も成立)

次の Prop も次§の例のための準備である:

<u>Prop 2.14</u> $X$ を可算集合とし, $\varphi: X\to[0,\infty]$ とする.

(1) $A\subset X$ に対し $\mu_\varphi(A) := \sum_{x\in A}\varphi(x)$ と定める.

このとき $\mu_\varphi$ は $(X, 2^X)$ 上の測度である. $(\mu_\varphi(\{x\}) := \varphi(x))$

(2) $f: X\to[0,\infty]$ とすると $f$ は $2^X$-可測であり,

$$\int_X f\,d\mu_\varphi = \sum_{x\in X} f(x)\varphi(x).$$

(☺ 演習問題とする. (1) は 0-1 Problem 1.9, (2) は 0-1 Problem 1.20.)

<u>注意2.15</u> $X$ が可算無限のとき, $\sum_{x\in X}\varphi(x)$ は無限和なので, その定義には注意が必要である: (注 $A=\phi$ のとき $\sum_{x\in A}\varphi(x) := 0$)

$\varphi: X\to[0,\infty]$ とし, $\mathbb{N}\ni n\mapsto x_n\in X$ は $\mathbb{N}$ から $X$ への全単射とするとき,

$$\sum_{x\in X}\varphi(x) := \sum_{n=1}^\infty \varphi(x_n) \overset{(*)}{=} \sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}} \sum_{x\in A}\varphi(x).$$

(特に, $\sum_{x\in X}\varphi(x)$ は全単射 $\mathbb{N}\to X$, $n\mapsto x_n$ の取り方に依らずに定まる.)

<u>等号$(*)$の証明</u>:

$N\in\mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=1}^N \varphi(x_n) = \sum_{x\in\{x_1,\cdots,x_N\}}\varphi(x) \le \sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x)$

なので $\sum_{n=1}^\infty \varphi(x_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\varphi(x_n) \le \sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x)$.

逆に $A\subset X$, $A$ は有限集合, とするとき

$\exists N\in\mathbb{N}$, $A\subset\{x_1,\cdots,x_N\}$ となるので $\sum_{x\in A}\varphi(x) \le \sum_{n=1}^N\varphi(x_n) \le \sum_{n=1}^\infty\varphi(x_n)$.

$$\therefore \sup_{\substack{A\subset X\\ 有限}}\sum_{x\in A}\varphi(x) \le \sum_{n=1}^\infty\varphi(x_n). \quad ■$$

Date

## §3 確率分布の例

用語 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度のことを $\mathbb{R}^d$ 上の分布(確率分布, (probability) distribution)もしくは $\mathbb{R}^d$ 上の法則(確率法則, (probability) law)ともいう。

### 3.1 $\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の確率分布

例3.1 $n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$ とする。

$$B(n,p)(\{k\}) := \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k\in\{0,1,\cdots,n\}$$

ただし $\binom{n}{k} := {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0^0:=1$. (大きさ $n$, 確率 $p$ の二項分布)

二項定理: $\forall x,y\in\mathbb{C}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

を思い出すと, $\sum_{k=0}^n B(n,p)(\{k\}) = (p+(1-p))^n = 1$,

従って $B(n,p)$ は $\{0,\cdots,n\}$ 上の確率測度。

例3.2 $\lambda\in(0,\infty)$ とする。

$$Po(\lambda)(\{n\}) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(パラメータ $\lambda$ の Poisson 分布) ポアソン

例3.3 $\alpha\in[0,1)$ とする。

$$Geom(\alpha)(\{n\}) := (1-\alpha)\alpha^n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(パラメータ $\alpha$ の幾何分布)

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1 = (1-\alpha)(1-\alpha)^{-1} = \sum_{n=1}^\infty (1-\alpha)\alpha^n,$$

従って $Po(\lambda)$, $Geom(\alpha)$ は確かに $\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の確率測度。

注意3.4 $S\subset\mathbb{R}$ が可算集合のとき, $X:\Omega\to S$ について:

$X$ が($\mathbb{R}$-値関数として)$\mathcal{F}$-可測 $\Leftrightarrow$ $\forall a\in S$, $X^{-1}(a)\in\mathcal{F}$.

(∵ ($\Rightarrow$) $a\in S$ とすると $\{a\}\underset{閉}{\subset}\mathbb{R}$ なので $\{a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, よって $X^{-1}(a)\in\mathcal{F}$.
($\Leftarrow$) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると $A\cap S$ は可算なので $X^{-1}(A) = X^{-1}(A\cap S) = \bigcup_{a\in A\cap S} X^{-1}(a) \in\mathcal{F}$.)

すると $X$ が real r.v. かつ可算集合 $S$ に値をとっているとき, $X$ の分布は $\mathbb{R}$ 上の分布とも $(S, 2^S)$ 上の確率測度とも思える。

そこで以下, 可算集合 $S\subset\mathbb{R}$ に対し $(S,2^S)$ 上の確率測度 $\mu$ は, ($\mu(\mathbb{R}\setminus S):=0$ と考えることにより) $\mathbb{R}$ 上の分布とみなす。

特に, $B(n,p)$, $Po(\lambda)$, $Geom(\alpha)$ は $\mathbb{R}$ 上の分布とみなされる。

### 3.2 $\mathbb{R}$ 上の確率分布

例3.4 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とする。

$$Unif(a,b)(dx) := \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\underbrace{dx}_{m_1(dx)}.$$

($m_1(dx)$ (1次元Lebesgue測度))

($[a,b]$ 上の一様分布)

例3.5 $\alpha\in(0,\infty)$ とする。

$$Exp(\alpha)(dx) := \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

(パラメータ $\alpha$ の指数分布)

(注 $\underset{\int_{\mathbb{R}}\alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx}{\underset{\shortparallel}{\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx}} \overset{}{\underset{MCT}{=}} \lim_{n\to\infty}\underset{\int_{\mathbb{R}}\alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{(0,n)}(x)dx}{\underset{\shortparallel}{\int_0^n \alpha e^{-\alpha x}dx}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-\alpha x}\right]_0^n = 1.$)

例3.6 $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ とする。 $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\alpha\in(0,\infty)$ ガンマ関数

$$Gamma(\alpha,\beta)(dx) := \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}|x|^{\alpha-1}e^{-\beta x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

(パラメータ $\alpha,\beta$ のガンマ分布)

(注 $\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \underset{x=y/\beta}{=} \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}e^{-y}\frac{1}{\beta}dy$

(cf. ①-㊀ Corollary 2.41) $= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-y}dy = 1.$)

例3.7 $m\in\mathbb{R}$, $v\in[0,\infty)$ とする。

$$\begin{cases} N(m,v)(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx & (v>0) \\ N(m,0) := \delta_m & (m \text{ における単位質量}; \ \delta_m(\{m\})=1) \end{cases}$$

平均 $m$, 分散 $v$ の正規分布(Gauss分布)

特に $N(0,1)$ は標準正規分布と呼ばれる。

$v>0$ とする。このとき

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx \overset{x=\sqrt{v}y+m}{=} \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \overset{(\star)}{=} 1.$$

従って $N(m,v)$ は $\mathbb{R}$ 上の確率分布である。

(等号$(\star)$の「証明」:

$\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2/2}dy\right)^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}dxdy \overset{\text{cf. Fubini; Thm4.8-(1)}}{=} \int_{\mathbb{R}^2}e^{-|z|^2/2}dz$

$\underset{z=(r\cos\theta, r\sin\theta)}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^{2\pi}re^{-r^2/2}d\theta\right)dr$ (Riemann積分論より)

$= \int_0^\infty 2\pi re^{-r^2/2}dr \underset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^n 2\pi re^{-r^2/2}dr$

$= \lim_{n\to\infty}\left[-2\pi e^{-r^2/2}\right]_0^n = 2\pi.$ ▨)

さて, $X$ は real r.v. で $X\sim N(m,v)$ とする。

claim $\mathbb{E}[X]=m$, $var(X)=v$.

∵ $v=0$ のとき, $\mathbb{P}[X=m] = \delta_m(\{m\}) = 1$ なので Prop1.28より

$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[m]=m$, $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[m^2]=m^2<\infty$,

$var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[0^2] = 0 = v.$

この計算の仕方は絶対に忘れないように!

そこで $v>0$ と仮定する. このとき $P_X = N(m,v)$ より

$$\boxed{E[(X-m)^2] \underset{f(x)=(x-m)^2}{\overset{Thm2.10}{=}} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 N(m,v)(dx) \overset{Thm2.11-(2)}{=} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx}$$

$$\underset{x=\sqrt{v}y+m}{=} \int_{\mathbb{R}} v y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} v y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \left[ -vy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \right]_{-n}^{n} + \int_{-n}^{n} \frac{v}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty} \left( -2vn \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \right) + \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\left(0 < e^{-\frac{n^2}{2}} \le \frac{1}{\frac{n^2}{2}+1}\right) \quad = 0 + v \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = v \cdot 1 = v.$$

よって $X-m \in \mathcal{L}^2(P)$, $X=(X-m)+m \in \mathcal{L}^2(P)$, 従って $E[|X|]<\infty$ で,

$$E[X] \underset{系2.10-(1)}{=} \int_{\mathbb{R}} x N(m,v)(dx) \underset{Thm2.11-(2)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx$$

$$\underset{x=\sqrt{v}y+m}{=} \int_{\mathbb{R}} (m+\sqrt{v}y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\overset{DCT}{=} m \cdot 1 + \lim_{n\to\infty} \left[ -\sqrt{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \right]_{-n}^{n} = m.$$

よって $E[X]=m$, $var(X)=E[(X-m)^2]=v$. //(claim)

例3.8 $m \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,\infty)$ とする.

$$Cauchy(m,\alpha)(dx) := \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx.$$

(パラメータ $m, \alpha$ の Cauchy分布)

$\left(注 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx \overset{MCT}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{m-n}^{m+n} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+(x-m)^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{\pi} Arctan \frac{x-m}{\alpha} \right]_{m-n}^{m+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} Arctan \frac{n}{\alpha} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1 \right)$

さて, $X$ は real r.v. で $X \sim Cauchy(m,\alpha)$ とする.

実はこのとき $E[X]$ は存在しない (☺演習問題とする; ⊖ Problem3.8)

## §4 独立性

● 以下, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, 特に断らない限り確率変数はこの $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義されているものとする.

Def4.1 (独立性) $n \in \mathbb{N}$ とし, 各 $k \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $d_k \in \mathbb{N}$ で $X_k$ は $d_k$-dim. r.v. であるとする.

$\{X_k\}_{k=1}^{n}$: 独立 (independent)

$\overset{def}{\iff} \forall A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$, $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$P[X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n] = P[X_1 \in A_1] \cdots P[X_n \in A_n]$$

独立性の取り扱いのために, 測度論からの2つの定理 (確率測度の一意性定理(Thm4.6)・Fubiniの定理(Thm4.8)) を準備する. 以下にこれらの定理の証明を与えるが, 講義では証明には触れないので各自で自習されたい.

Def4.2 (乗法族, Dynkin族) $X$ を集合とし, $\mathcal{A}, \mathcal{D} \subset 2^X$ とする.

(1) $\mathcal{A}$: 乗法族 ($\pi$-system) $\overset{def}{\iff} \forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{D}$: Dynkin族 (Dynkin system) in $X$

$\overset{def}{\iff}$ (D1) $X \in \mathcal{D}$

(D2) $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(D3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ で $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Prop4.3 $X$ を集合とする.

(1) $\Lambda$ を空でない集合とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathcal{D}_\lambda$ は $X$ における Dynkin族であるとする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ も $X$ における Dynkin族.

(2) $\mathcal{A} \subset 2^X$ とし

$$\delta_X(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} は X の Dynkin族 \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{D}}} \mathcal{D} \cdots (4.1)$$

とおく. このとき $\delta_X(\mathcal{A})$ は, $X$ の Dynkin族で $\mathcal{A}$ を含むもののうち最小のものである. ($\delta_X(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ によって生成される $X$ の Dynkin族といい, 単に $\delta(\mathcal{A})$ とも書く.) また $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \sigma_X(\mathcal{A})$.

☺ Prop1.7の証明と同様だが一応詳しく述べておく.

(1) $\mathcal{D} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ が Def4.2 の (D1), (D2), (D3) を満たすことを示す.

(D1): $\forall \lambda \in \Lambda$, $X \in \mathcal{D}_\lambda$ (☺ $\mathcal{D}_\lambda$ の(D1)) なので $X \in \mathcal{D}$.

(D2): $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ とすると, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し $A, B \in \mathcal{D}_\lambda$, $A \subset B$ なので $\mathcal{D}_\lambda$ の(D2)より $B \setminus A \in \mathcal{D}_\lambda$. $\therefore B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ で $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ とすると, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対し $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_\lambda$ なので $\mathcal{D}_\lambda$ の(D3)より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_\lambda$.

よって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(2) $2^X$ は $X$ の Dynkin族で $\mathcal{A} \subset 2^X$ を満たすので, (4.1) における共通部分 "$\bigcap$" の添字集合は空でない. よって (4.1) 右辺の "$\bigcap$" は定まり, (1)により $\delta_X(\mathcal{A})$ は $X$ の Dynkin族. (4.1)より明らかに, $\mathcal{A} \subset \delta_X(\mathcal{A})$ であり, また $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ なる $X$ の Dynkin族 $\mathcal{D}$ に対し $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$. さらに $\sigma_X(\mathcal{A})$ は明らかに $X$ の Dynkin族で $\mathcal{A} \subset \sigma_X(\mathcal{A})$ を満たすので, $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \sigma_X(\mathcal{A})$. ■

Thm4.4 (Dynkin族定理) $X$ を集合とし, $\mathcal{A} \subset 2^X$ は乗法族とする. このとき

$$\delta_X(\mathcal{A}) = \sigma_X(\mathcal{A}).$$

Lemma4.5 $X$ を集合とし, $\mathcal{D}$ を $X$ の Dynkin族とする. このとき, $\mathcal{D}$ が乗法族ならば $\mathcal{D}$ は $X$ の $\sigma$-加法族である.

注 写像$f:X\to Y$と$A\subset X$に対し, $f|_A:A\to Y$を$f|_A(x):=f(x)$, $x\in A$, で定める. この$f|_A$を$f$の$A$への制限という.

∵ (D1)より$X\in\mathcal{D}$であるので, (D2)より, $\phi=X\setminus X\in\mathcal{D}$, かつ$A\in\mathcal{D}$に対し$A^c=X\setminus A\in\mathcal{D}$.

さて, $A,B\in\mathcal{D}$とすると$A^c,B^c\in\mathcal{D}$が上の議論から分かり, $\mathcal{D}$は乗法族という仮定から$A^c\cap B^c\in\mathcal{D}$, 従ってまた$A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\in\mathcal{D}$.

$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}$とし, $n\in\mathbb{N}$に対し$B_n:=\bigcup_{k=1}^n A_k$とおくと, $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n\subset B_{n+1}$であり, また前段落の結果から$\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n\in\mathcal{D}$であるので, (D3)より$\bigcup_{n=1}^\infty A_n=\bigcup_{n=1}^\infty B_n\in\mathcal{D}$. ■

**Thm4.4の証明**

$\delta_X(\mathcal{A})$が$X$の$\sigma$-加法族であることが示せれば, $\sigma_X(\mathcal{A})$の最小性から$\sigma_X(\mathcal{A})\subset\delta_X(\mathcal{A})$が分かり, これとProp4.3-(2)より$\delta_X(\mathcal{A})\subset\sigma_X(\mathcal{A})$だったことからThm4.4の主張が得られる. そこで$\delta_X(\mathcal{A})$が$X$の$\sigma$-加法族であることを示せばよく, Lemma4.5よりそのためには$\delta_X(\mathcal{A})$が乗法族であることを示せばよい.

$Y\in\delta_X(\mathcal{A})$とし, $\mathcal{D}_Y:=\{A\subset X\mid A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})\}$とおく.

claim $\mathcal{D}_Y$は$X$のDynkin族.

∵ (D1): $X\cap Y=Y\in\delta_X(\mathcal{A})$なので, $X\in\mathcal{D}_Y$.

(D2): $A,B\in\mathcal{D}_Y$, $A\subset B$とすると, $A\cap Y, B\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$, $A\cap Y\subset B\cap Y$なので, $\delta_X(\mathcal{A})$に対する(D2)により$(B\setminus A)\cap Y=(B\cap Y)\setminus(A\cap Y)\in\delta_X(\mathcal{A})$. $\therefore B\setminus A\in\mathcal{D}_Y$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}_Y$で$\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$とすると, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$かつ$A_n\cap Y\subset A_{n+1}\cap Y$であるので, $\delta_X(\mathcal{A})$に対する(D3)より$(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)\cap Y=\bigcup_{n=1}^\infty(A_n\cap Y)\in\delta_X(\mathcal{A})$.

$\therefore \bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{D}_Y$. //(claim)

さて, そこでまず$Y\in\mathcal{A}$とすると, $\mathcal{A}$が乗法族であるという仮定から$\forall A\in\mathcal{A}$, $A\cap Y\in\mathcal{A}\subset\delta_X(\mathcal{A})$, 従って$\forall A\in\mathcal{A}$, $A\in\mathcal{D}_Y$すなわち$\mathcal{A}\subset\mathcal{D}_Y$となるので, claimと合わせて$\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}_Y$を得る. $Y\in\mathcal{A}$は任意なのでこれは$\forall Y\in\mathcal{A}$, $\forall A\in\delta_X(\mathcal{A})$, $A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$を意味する.

$A$と$Y$の役割を入れ替えると, 各$Y\in\delta_X(\mathcal{A})$に対して$\forall A\in\mathcal{A}$, $A\cap Y\in\delta_X(\mathcal{A})$, すなわち$\mathcal{A}\subset\mathcal{D}_Y$となるのでclaimと合わせて$\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}_Y$. $Y\in\delta_X(\mathcal{A})$は任意だったので, これは$\delta_X(\mathcal{A})$が乗法族であることを意味する. ■

**Thm4.6 ((確率)測度の一意性定理)**

$X$を集合, $\mathcal{A}\subset 2^X$を乗法族とし, $\mu_1,\mu_2$は$(X,\sigma_X(\mathcal{A}))$上の測度とする. このとき, もし$\mu_1|_{\mathcal{A}}=\mu_2|_{\mathcal{A}}$ (つまり$\forall A\in\mathcal{A}$, $\mu_1(A)=\mu_2(A)$) かつ$\mu_1(X)=\mu_2(X)<\infty$ならば$\mu_1=\mu_2$である.

∵ $\mathcal{D}:=\{A\in\sigma_X(\mathcal{A})\mid\mu_1(A)=\mu_2(A)\}$とおく. 仮定より$\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$.

claim $\mathcal{D}$は$X$のDynkin族.

∵ (D1): $X\in\sigma_X(\mathcal{A})$で, 仮定より$\mu_1(X)=\mu_2(X)$なので$X\in\mathcal{D}$.

(D2): $A,B\in\mathcal{D}$, $A\subset B$とすると, $k=1,2$に対し$\mu_k(X)<\infty$より$\infty>\mu_k(X)\geqq\mu_k(B)=\mu_k(A)+\mu_k(B\setminus A)$であるので, 各集合の測度$\mu_k(\cdots)$の値はすべて実数値であり, $\underset{\in\sigma_X(\mathcal{A})}{B\setminus A}$, $\mu_1(B\setminus A)=\mu_1(B)-\mu_1(A)=\mu_2(B)-\mu_2(A)=\mu_2(B\setminus A)$. $\therefore B\setminus A\in\mathcal{D}$.

(D3): $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{D}$で$\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$とすると, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\sigma_X(\mathcal{A})$であり, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mu_1(A_n)=\mu_2(A_n)$. よってProp1.6-(3)より$\mu_1(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_2(A_n)=\mu_2(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$. $\therefore\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{D}$. //(claim)

$\mathcal{A}$とclaimから, $\delta_X(\mathcal{A})$の最小性より$\delta_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}$となるが, 一方$\mathcal{A}$は乗法族なのでThm4.4より$\delta_X(\mathcal{A})=\sigma_X(\mathcal{A})$である. 従って$\sigma_X(\mathcal{A})\subset\mathcal{D}$, すなわち$\forall A\in\sigma_X(\mathcal{A})$, $\mu_1(A)=\mu_2(A)$となるので, $\mu_1=\mu_2$. ■

次に, 積分の順序交換に関する定理であるFubiniの定理を述べる. そのために次の定義が必要である.

**Def4.7 ($\sigma$-有限)** $(X,\mathcal{M},\mu)$を測度空間とする.

$\mu$ (もしくは$(X,\mathcal{M},\mu)$) が**$\sigma$-有限**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \exists\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M},\ \begin{cases}X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ \mu(X_n)<\infty.\end{cases}$$

注 一般に$\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M}$に対して$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)\leqq\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)$ (劣加法性, ①-① Problem1.11) であることに注意すると, Def4.7においては$X_n$の代わりに$\bigcup_{k=1}^n X_k$を考えることにより, $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n\subset X_{n+1}$と仮定してよい.

**Thm4.8 ($\mathbb{R}^{n+k}$上のFubiniの定理)** $n,k\in\mathbb{N}$とし, $\mu$は$(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$上の$\sigma$-有限な測度, $\nu$は$(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$上の$\sigma$-有限な測度とする. また$f:\mathbb{R}^{n+k}\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測とする.

(0) $f$ を $x\in\mathbb{R}^n$ と $y\in\mathbb{R}^k$ の2変数についての関数とみなすとき，$\forall x\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(x,\cdot):\mathbb{R}^k\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測，$\forall y\in\mathbb{R}^k$ に対し $f(\cdot,y):\mathbb{R}^n\to[-\infty,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測．

(1) $f$ が $[0,\infty]$-値ならば，

- $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y):\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，
- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x):\mathbb{R}^k\to[0,\infty]$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測，
- $\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$ (4.2)

(2) $\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)$, $\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$ のうち少なくとも1つは $\infty$ でないとする．このとき，

- $\mu$-a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(x,\cdot)$ は $\nu$-可積分，
- $\nu$-a.e. $y\in\mathbb{R}^k$ に対し $f(\cdot,y)$ は $\mu$-可積分，
- $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は $\mu$-可積分，$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ は $\nu$-可積分であり，等式 (4.2) が成り立つ．

<u>注意4.9</u> Thm4.8-(2)において，関数 $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は「$f(x,y)$ が $y$ について $\nu$-可積分であるような $x$」，すなわち $x\in A:=\left\{z\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^k}|f(z,y)|\,d\nu(y)<\infty\right\}$ に対してしか定義されていないことに注意しよう．Thm4.8-(2)の1つ目の主張は $\mu(\mathbb{R}^n\setminus A)=0$ ということであり，$\mathbb{R}^n\setminus A$ 上では $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は <u>0であると約束する．</u>
($\mu(\mathbb{R}^n\setminus A)=0$ なので，Prop1.28により，0以外の値としてもよい．)
$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ についても同様の注意があてはまる．

<u>Thm4.8の証明</u>

(0) $y\in\mathbb{R}^k$ を固定し，$\mathcal{A}_y:=\{A\subset\mathbb{R}^{n+k} \mid 1_A(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測$\}$ とおく．$I\in\mathcal{J}_{n+k}$ (Prop1.9参照) とするとある $I_1\in\mathcal{J}_n, I_2\in\mathcal{J}_k$ により $I=I_1\times I_2$ と書け，従って $1_I(\cdot,y)=1_{I_2}(y)\cdot 1_{I_1}$ となるので $I\in\mathcal{A}_y$，すなわち $\mathcal{J}_{n+k}\subset\mathcal{A}_y$．

<u>claim</u> $\mathcal{A}_y$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の $\sigma$-加法族．

∵ $1_\phi(\cdot,y)=0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\phi\in\mathcal{A}_y$ であり，$A\in\mathcal{A}_y$ ならば $1_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A}(\cdot,y)=1-1_A(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\mathbb{R}^{n+k}\setminus A\in\mathcal{A}_y$．$\{A_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{A}_y$ とすると，
$1_{\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)}(\cdot,y)=\lim_{m\to\infty}\left(1_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_1}\cdots 1_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m}\right)(\cdot,y)$
はProp1.14より $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測なので $\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)\in\mathcal{A}_y$ であり，よって $\bigcup_{m=1}^\infty A_m=\mathbb{R}^{n+k}\setminus\bigcap_{m=1}^\infty(\mathbb{R}^{n+k}\setminus A_m)\in\mathcal{A}_y$. // (claim)

claimと $\mathcal{J}_{n+k}\subset\mathcal{A}_y$ より $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\sigma(\mathcal{J}_{n+k})\subset\mathcal{A}_y$，すなわち $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$，$1_A(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測．

さて $f(\cdot,y)$ に関して，$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ または $A=\{\infty\}$ または $A=\{-\infty\}$ とすると，$(f(\cdot,y))^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x,y)\in f^{-1}(A)\}$
$=\left(1_{f^{-1}(A)}(\cdot,y)\right)^{-1}(1)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
が前段落の結果と $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ より従う．よって $f(\cdot,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測であり，同様に $\forall x\in\mathbb{R}^n$，$f(x,\cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測である．

(1) $\mu,\nu$ が $\sigma$-有限との仮定から，$\{X_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と $\{Y_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ を，$\mathbb{R}^n=\bigcup_{m=1}^\infty X_m$, $\mathbb{R}^k=\bigcup_{m=1}^\infty Y_m$，かつ $\forall m\in\mathbb{N}$, $\mu(X_m)<\infty$, $X_m\subset X_{m+1}$, $\nu(Y_m)<\infty$, $Y_m\subset Y_{m+1}$ となるように選ぶことができる．さて $m\in\mathbb{N}$ を固定し
$\mathcal{A}_m:=\{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \mid f=1_{A\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張を全て満たす$\}$
とおく．
(注 $X_m\times Y_m\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ である；下の注意4.11参照．)

<u>claim 1</u> $\mathcal{J}_{n+k}\subset\mathcal{A}_m$.

∵ $I\in\mathcal{J}_{n+k}$ とすると，$\exists I_1\in\mathcal{J}_n$, $\exists I_2\in\mathcal{J}_k$, $I=I_1\times I_2$ であり，すると $\int_{\mathbb{R}^k}1_{I\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)=\int_{\mathbb{R}^k}1_{I_1\cap X_m}(\cdot)1_{I_2\cap Y_m}(y)\,d\nu(y)$
$=\nu(I_2\cap Y_m)1_{I_1\cap X_m}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，
$\int_{\mathbb{R}^n}1_{I\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}1_{I_2\cap Y_m}(\cdot)1_{I_1\cap X_m}(x)\,d\mu(x)$
$=\mu(I_1\cap X_m)1_{I_2\cap Y_m}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測
となり，さらに前者の $\mu$-積分，後者の $\nu$-積分は共に $\mu(I_1\cap X_m)\cdot\nu(I_2\cap Y_m)$ で等しい．以上より $f=1_{I\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張の性質を全て満たすので $I\in\mathcal{A}_m$，よって $\mathcal{J}_{n+k}\subset\mathcal{A}_m$. // (claim 1)

<u>claim 2</u> $\mathcal{A}_m$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ のDynkin族．

∵ (D1)：$1_{\mathbb{R}^{n+k}\cap(X_m\times Y_m)}(x,y)=1_{X_m}(x)1_{Y_m}(y)$ であるので，この $d\nu(y)$-積分は $\nu(Y_m)1_{X_m}(x)$ で $x\in\mathbb{R}^n$ について $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，さらにその $d\mu(x)$-積分は $\mu(X_m)\nu(Y_m)$．$d\mu(x)$ と $d\nu(y)$ の順を入れ換えても同様なので，$f=1_{\mathbb{R}^{n+k}\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張を全て満たす．よって $\mathbb{R}^{n+k}\in\mathcal{A}_m$.

(D2)：$A,B\in\mathcal{A}_m$, $A\subset B$ とする．このとき，$C\in\{A,B\}$ に対し，

- $\int_{\mathbb{R}^k}1_{C\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測かつ
$\int_{\mathbb{R}^k}1_{C\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\le\int_{\mathbb{R}^k}1_{X_m}(\cdot)1_{Y_m}(y)\,d\nu(y)=\overset{<\infty!}{\nu(Y_m)}1_{X_m}$，
さらに左辺の $\mu$-積分は $\int_{\mathbb{R}^n}\nu(Y_m)\cdot 1_{X_m}\,d\mu=\underset{<\infty!}{\mu(X_m)\nu(Y_m)}$ 以下．

$\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{C\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$ とその $\nu$-積分についても同様であるので，$f=\mathbf{1}_{C\cap(X_m\times Y_m)}$ に対し(1)の主張の4つの積分は $[0,\infty)$-値である．そこで

$$\mathbf{1}_{B\cap(X_m\times Y_m)}-\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}=\mathbf{1}_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}$$

に注意して，$\mathbf{1}_{B\cap(X_m\times Y_m)}$, $\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}$ が(1)の主張を満たすことから，

$$\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\overset{\text{Thm 1.24-(2)}}{=}\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{B\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)-\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$$

は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{(B\setminus A)\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)\overset{\text{Thm 1.24-(2)}}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{B\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)-\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$$

は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測であり，かつ$\boxed{\text{前者}}$の $\mu$-積分と後者の $\nu$-積分が（再び積分の線型性を用いると）一致することが分かる．すなわち，$B\setminus A\in\mathcal{A}_m$.

(D3): $\{A_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}_m$, $\forall l\in\mathbb{N}$, $A_l\subset A_{l+1}$ とする．このとき

- $\forall l\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{A_l\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\le\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{A_{l+1}\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$,
  $\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{A_l\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)\le\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{A_{l+1}\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$.
- $\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{A_l\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)\xrightarrow[l\to\infty]{\text{MCT}}\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{1}_{(\bigcup_{l=1}^{\infty}A_l)\cap(X_m\times Y_m)}(\cdot,y)\,d\nu(y)$,
  $\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{A_l\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)\xrightarrow{\phantom{MCT}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{(\bigcup_{l=1}^{\infty}A_l)\cap(X_m\times Y_m)}(x,\cdot)\,d\mu(x)$.

従って，各 $l\in\mathbb{N}$ に対し

$\mathbf{1}_{A_l\cap(X_m\times Y_m)}$ が(1)の主張を満たすことから，その $l\to\infty$ とした極限を考え Prop1.14とMCTを用いることで(1)の主張が $\mathbf{1}_{(\bigcup_{l=1}^{\infty}A_l)\cap(X_m\times Y_m)}$ に対して成り立つことが分かる．よって $\bigcup_{l=1}^{\infty}A_l\in\mathcal{A}_m$.

以上より $\mathcal{A}_m$ は $\mathbb{R}^{n+k}$ の Dynkin族である．//(claim2)

claim1とclaim2より $\delta(\mathcal{J}_{n+k})\subset\mathcal{A}_m$ であるが，一方 $\mathcal{J}_{n+k}$ は乗法族であることが容易に確認できるので，Thm4.4とProp1.9により $\delta(\mathcal{J}_{n+k})=\sigma(\mathcal{J}_{n+k})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$，従って $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\subset\mathcal{A}_m$ である．すなわち，

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ に対し $\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}$ は(1)の主張を全て満たす．

ところがここで $m\in\mathbb{N}$ は任意であり，

- $\forall m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}\le\mathbf{1}_{A\cap(X_{m+1}\times Y_{m+1})}$,
- $\lim_{m\to\infty}\mathbf{1}_{A\cap(X_m\times Y_m)}=\mathbf{1}_A$

であるので，上の claim2-(D3)の証明と同様に $m\to\infty$ とした極限をとり Prop1.14とMCTを用いれば，(1)の主張の $f=\mathbf{1}_A$ に対しての成立が，$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ について従う．

あとは積分の線型性(Thm1.18-(3))とProp1.12により，(1)は $f$ が $[0,\infty)$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数の場合にも成り立つことが分かり，すると一般の $f$ に対しては Prop1.17のような $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数の列 $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ を取って，$S_m$ に対する(1)の主張で $m\to\infty$ としてMCTとProp1.14を用いればよい．

(2) (1)で得られた(4.2)を $|f|$ に適用し仮定と合わせると，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)<\infty.$$

よって Prop1.27-(2)より $\mu(M)=\nu(N)=0$，ただし

$$M:=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^k}|f(x,y)|\,d\nu(y)=\infty\right\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$
$$N:=\left\{y\in\mathbb{R}^k \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)=\infty\right\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

(1)の前半の主張より

そこで

$$F_\pm:=\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n\setminus M}\cdot\int_{\mathbb{R}^k}f^\pm(\cdot,y)\,d\nu(y),$$
$$G_\pm:=\mathbf{1}_{\mathbb{R}^k\setminus N}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}f^\pm(x,\cdot)\,d\mu(x)$$

とおくと，$F_\pm$ は $[0,\infty)$-値で(1)の前半により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測，同様に $G_\pm$ は $[0,\infty)$-値で(1)の前半により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-可測．$\mu(M)=0=\nu(N)$ なので Prop1.28と(1)の(4.2)より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}F_\pm\,d\mu&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}f^\pm(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^\pm(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int_{\mathbb{R}^k}G_\pm\,d\nu\\&\le\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)<\infty.\end{aligned}$$

よって $F_\pm\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $G_\pm\in\mathcal{L}^1(\nu)$ であり，Thm1.24-(2)より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(F_+-F_-)\,d\mu&=\int_{\mathbb{R}^n}F_+\,d\mu-\int_{\mathbb{R}^n}F_-\,d\mu\\&=\int_{\mathbb{R}^k}G_+\,d\nu-\int_{\mathbb{R}^k}G_-\,d\nu=\int_{\mathbb{R}^k}(G_+-G_-)\,d\nu.\end{aligned}$$

ところが，$x\in\mathbb{R}^n\setminus M$, $y\in\mathbb{R}^k\setminus N$ に対して

$$\begin{aligned}(F_+-F_-)(x)&=\int_{\mathbb{R}^k}f^+(x,y)\,d\nu(y)-\int_{\mathbb{R}^k}f^-(x,y)\,d\nu(y)\\&=\int_{\mathbb{R}^k}f(x,y)\,d\nu(y),\end{aligned}$$
（$x\in M$ のときは両辺共0で等しい）

$$\begin{aligned}(G_+-G_-)(y)&=\int_{\mathbb{R}^n}f^+(x,y)\,d\mu(x)-\int_{\mathbb{R}^n}f^-(x,y)\,d\mu(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,d\mu(x)\end{aligned}$$
（$y\in N$ のときは両辺共0で等しい）

であるので，等式 $\int_{\mathbb{R}^n}(F_+-F_-)\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^k}(G_+-G_-)\,d\nu$ は $f$ に対する(4.2)を意味し，同時に $\int_{\mathbb{R}^k}f(\cdot,y)\,d\nu(y)$ が $\mu$-可積分，$\int_{\mathbb{R}^n}f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ が $\nu$-可積分であることも分かる．

以上で Fubiniの定理(Thm4.8)の証明が完了した．■

**注意4.10** Thm4.8-(1),(2)の状況で，$\mu = m_n,\ \nu = m_k$ (つまり$\mu,\nu$が共にLebesgue測度)である場合には(4.2)の両辺は$\mathbb{R}^{n+k}$上のLebesgue測度$m_{n+k}$による積分
$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz$ に等しい.

∵ Thm4.8-(1)については，$X_m := [-m,m]^n,\ Y_m := [-m,m]^k$と取り，「(4.2)の両辺 $=\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz$」を主張に追加した上で同様の証明を行えばよい. ただし「claim1 $\mathcal{I}_{n+k} \subset \mathcal{A}_m$」及び「claim2-(D1) $\mathbb{R}^{n+k}\in\mathcal{A}_m$」の証明には，Lebesgue測度の定義(例1.8参照)から直ちに従う次の事実を用いる:

$\forall I_1\in\mathcal{I}_n,\ \forall I_2\in\mathcal{I}_k,\ m_n(I_1)\cdot m_k(I_2) = m_{n+k}(I_1\times I_2)$.

Thm4.8-(2)については，その上記の証明によってこの場合の(4.2)の両辺の値が$f^\pm$に対する同様の積分の差になっていることから，前段落の結果によりそれはさらに $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f^+(z)dz - \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f^-(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(z)dz\ (\in\mathbb{R})$ 等しいことになり，よって成り立つ. ∎

**注意4.11** $n,k\in\mathbb{N}$とし，

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) := \{A\times B \mid A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$

と定める. このとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$.

∵ $\mathcal{I}_{n+k}\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\subset\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ なので
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \underset{\text{Prop1.9}}{=} \sigma(\mathcal{I}_{n+k})\subset\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$である.

$\mathbb{R}^{n+k}$の各元を$(x,y),\ x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^k$の形に書き表すこととし，$X:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n,\ Y:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$を

$X(x,y) := x,\quad Y(x,y) := y$

により定める. X,Yは可測空間$(\mathbb{R}^{n+k},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}))$上で定義された確率変数とみなせることが，$(X,Y)$(すなわち$\mathbb{R}^{n+k}$の恒等写像$id_{\mathbb{R}^{n+k}}$)が$(\mathbb{R}^{n+k},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}))$上の$(n+k)$-dim. r.v.であることとProp2.3より分かる. 従って$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$に対し

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\ni X^{-1}(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+k}\mid x\in A\} = A\times\mathbb{R}^k$,

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})\ni Y^{-1}(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+k}\mid y\in B\} = \mathbb{R}^n\times B$,

よって $A\times B = (A\times\mathbb{R}^k)\cap(\mathbb{R}^n\times B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$となるので，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$. ゆえに
$\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$であり，これと冒頭の議論から $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$が得られる. ∎

Def4.1で確率変数の独立性を定義したが，独立性は次のように期待値を各確率変数の分布での逐次積分として表すことを可能にする:

**Thm4.12** $n,k\in\mathbb{N}$，Xはn-dim. r.v.，Yはk-dim. r.v.とし，$\{X,Y\}$は独立とする. また$f:\mathbb{R}^{n+k}\to[-\infty,\infty]$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測とする.

(1) fが$[0,\infty]$-値ならば

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathbb{P}_X(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy). \end{aligned} \quad (4.3)$$

(2) $|f|$に対する(4.3)の3辺のいずれか1つ(従って3つ全て)が$\infty$と異なるならば，fに対して(4.3)が成り立つ.

(注 Prop2.4とThm2.10は全く同様の証明により，fが$[-\infty,\infty]$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測関数でも成り立つことに注意.)

**Thm4.12の証明** Thm4.8-(1),(2)の証明にならう.

(1) $\mathcal{A} := \{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \mid f=\mathbb{1}_A$に対して(4.3)の1行目が成立$\}$ とおく. ((4.3)の2行目の"="はThm4.8-(1)により既知.)

claim1 $\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}$.

∵ $I\in\mathcal{I}_{n+k}$とすると，$\exists I_1\in\mathcal{I}_n,\ \exists I_2\in\mathcal{I}_k,\ I=I_1\times I_2$であり，すると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_I(X,Y)] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\in I_1, Y\in I_2\}}] = \mathbb{P}[X\in I_1, Y\in I_2]\\ &\overset{\{X,Y\}\text{独立}}{=} \mathbb{P}[X\in I_1]\cdot\mathbb{P}[Y\in I_2] = \mathbb{P}_X(I_1)\mathbb{P}_Y(I_2)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k}\mathbb{1}_{I_1\times I_2}(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)\end{aligned}$$

となるので $I = I_1\times I_2\in\mathcal{A}$. よって$\mathcal{I}_{n+k}\subset\mathcal{A}$. //(claim1)

claim2 $\mathcal{A}$は$\mathbb{R}^{n+k}$のDynkin族.

∵ (D1): $f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n+k}}=1$に対して(4.3)の1行目は両辺共1なので$\mathbb{R}^{n+k}\in\mathcal{A}$.

(D2): $A,B\in\mathcal{A},\ A\subset B$とするとき，$\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$に注意して，Thm1.24-(2)を用いて$f=\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B$に対する(4.3)の1行目の両辺それぞれで差をとれば$f=\mathbb{1}_{B\setminus A}$に対する(4.3)の1行目を得るので$B\setminus A\in\mathcal{A}$.

(D3): $\{A_l\}_{l=1}^\infty\subset\mathcal{A},\ \forall l\in\mathbb{N},\ A_l\subset A_{l+1}$のとき，MCTを用いて$f=\mathbb{1}_{A_l}$に対する(4.3)の1行目で$l\to\infty$とすれば$\bigcup_{l=1}^\infty A_l\in\mathcal{A}$が得られる. //(claim2)

よって $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}) \underset{\text{Prop1.9}}{=} \sigma(\mathcal{I}_{n+k}) \underset{\text{Thm4.4}}{=} \delta(\mathcal{I}_{n+k})\subset\mathcal{A}$

となるので，$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k}),\ f=\mathbb{1}_A$に対し(4.3)の1行目が成り立つ. あとは積分の線型性(Thm1.18-(3))により，(4.3)の1行目はfが$[0,\infty)$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-単関数に対しても成り立つことが分かり，そこでProp1.17とMCTにより一般のfに対しても成り立つことが示される.

(2) $(f(X,Y))^\pm = f^\pm(X,Y)$とThm4.8-(2)の証明中の議論に注意して，$f^\pm$に対する(4.3)について各辺それぞれの差をとればfに対する(4.3)が得られる. ∎

**Prop4.13** $n\in\mathbb{N}$, また各$k\in\{1,\cdots,n\}$に対し$d_k\in\mathbb{N}$, $X_k$は$d_k$-dim. r.v.とし, $\{X_k\}_{k=1}^n$は独立であるとする.

(1) $\forall I\subset\{1,\cdots,n\}$, $\{X_k\}_{k\in I}$は独立.

(2) 各$k\in\{1,\cdots,n\}$に対し$f_k:\mathbb{R}^{d_k}\to\mathbb{R}$は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$-可測とするとき, $\{f_k(X_k)\}_{k=1}^n$は独立.

(3) $k\in\mathbb{N}$, $k<n$とし, $Y:=(X_1,\cdots,X_k)$, $Z:=(X_{k+1},\cdots,X_n)$とおく. このとき$\{Y,Z\}$は独立.

∵(1) 各$k\in I$に対し$A_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$を任意にとり, また$k\in\{1,\cdots,n\}\setminus I$に対し$A_k:=\mathbb{R}^{d_k}$とおく. このとき$\{X_k\}_{k=1}^n$の独立性から $\mathbb{P}[\forall k\in I, X_k\in A_k]=\mathbb{P}[X_1\in A_1,\cdots,X_n\in A_n]$
$=\mathbb{P}[X_1\in A_1]\cdots\cdots\mathbb{P}[X_n\in A_n]=\prod_{k\in I}\mathbb{P}[X_k\in A_k]$
となることが分かる($k\in\{1,\cdots,n\}\setminus I$に対し$\mathbb{P}[X_k\in A_k]=1$, を用いた).

(2) $\{A_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$とすると, $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $f_k^{-1}(A_k)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$なので, $\mathbb{P}[f_1(X_1)\in A_1,\cdots,f_n(X_n)\in A_n]$
$=\mathbb{P}[X_1\in f_1^{-1}(A_1),\cdots,X_n\in f_n^{-1}(A_n)]$
$\underset{\{X_k\}_{k=1}^n\text{独立}}{=}\mathbb{P}[X_1\in f_1^{-1}(A_1)]\cdots\cdots\mathbb{P}[X_n\in f_n^{-1}(A_n)]$
$=\mathbb{P}[f_1(X_1)\in A_1]\cdots\cdots\mathbb{P}[f_n(X_n)\in A_n]$.

(3) $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$, $B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$ $(D_1:=\sum_{j=1}^k d_j, D_2:=\sum_{j=1+k}^n d_j)$に対し $\mu_1(B_1,B_2):=\mathbb{P}[Y\in B_1, Z\in B_2]$,
$\mu_2(B_1,B_2):=\mathbb{P}[Y\in B_1]\mathbb{P}[Z\in B_2]$とおく.
$\mu_1=\mu_2$を示せばよい.

claim1 $\mu_1(B_1,B_2)$, $\mu_2(B_1,B_2)$は, $B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$を固定すると$B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$について, $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$を固定すると$B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$についての測度になる. (∵Thm2.10-(1)の証明と全く同様.)

claim2 $\forall B_2\in\mathcal{J}_{D_2}$, $\mu_1(\cdot,B_2)=\mu_2(\cdot,B_2)$.

∵$B_2\in\mathcal{J}_{D_2}$とする. $\{X_j\}_{j=1}^n$の独立性により, $\mu_1(\cdot,B_2)$と$\mu_2(\cdot,B_2)$は乗法族$\mathcal{J}_{D_1}$の上では一致していることが分かり($\mu_2$に対しては, (1)より$\{X_j\}_{j=1}^k$, $\{X_j\}_{j=k+1}^n$が独立なことを用いる), さらに$\mu_1(\mathbb{R}^{D_1},B_2)=\mathbb{P}[Z\in B_2]=\mu_2(\mathbb{R}^{D_1},B_2)<\infty$である. よってThm4.6より$\sigma(\mathcal{J}_{D_1})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$上$\mu_1(\cdot,B_2)=\mu_2(\cdot,B_2)$. // (claim2)

claim3 $\forall B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$, $\mu_1(B_1,\cdot)=\mu_2(B_1,\cdot)$.

∵$B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_1})$とする. claim2より$\mu_1(B_1,\cdot)$と$\mu_2(B_1,\cdot)$は乗法族$\mathcal{J}_{D_2}$の上では一致し, さらに$\mathbb{R}^{D_2}$に対しては共に$\mathbb{P}[Y\in B_1](<\infty)$に等しい. よってThm4.4により$\sigma(\mathcal{J}_{D_2})\underset{\text{Prop1.9}}{=}\mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_2})$上で$\mu_1(B_1,\cdot)=\mu_2(B_1,\cdot)$. // (claim3) ■

**Prop4.14** $n\in\mathbb{N}$とし, $\{X_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$は独立とする. このとき:

(1) $X_1\cdots\cdots X_n\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1\cdots\cdots X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdots\cdots\mathbb{E}[X_n]$.

(2) $var(\sum_{k=1}^n X_k)=\sum_{k=1}^n var(X_k)$.

∵(1) $n$についての数学的帰納法により示す. $n=1$のときは自明. $n\geqq 2$とし, $n-1$に対しては主張が成り立つと仮定する. $Y:=X_1\cdots\cdots X_{n-1}$とおく. $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$を$f(x_1,\cdots,x_{n-1}):=x_1\cdots\cdots x_{n-1}$で定めると$f$は連続なのでLemma1.15により$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$-可測であり, すると$Y=f(X_1,\cdots,X_{n-1})$なのでProp4.13-(2),(3)により$\{Y,X_n\}$は独立である.
$\mathbb{R}^2\ni(y,x)\longmapsto xy\in\mathbb{R}$も連続, 従ってLemma1.15より$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測なので, $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|xy|\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)\underset{\text{Thm2.10-(2)}}{=}\mathbb{E}[|X_n|]\cdot\mathbb{E}[|Y|]<\infty$であることに注意するとThm4.12-(2)により$YX_n\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$,
$\mathbb{E}[X_1\cdots\cdots X_n]=\mathbb{E}[YX_n]=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}xy\,\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)$
$\underset{\text{系2.10-(1)}}{=}\mathbb{E}[Y]\cdot\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdots\cdots\mathbb{E}[X_n]$.
よって$n$に対する主張が示せ, 帰納法が完了した.

(2) まず $\forall X\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$ に注意する. (実際, $X\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$なら$X-\mathbb{E}[X]\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$なので両辺とも$\infty$に等しい.)
$Y_k:=X_k-\mathbb{E}[X_k]$とおく. Prop4.13-(2)より$\{Y_k\}_{k=1}^n$は独立であり, $\mathbb{E}[Y_k]=0$, $var(X_k)=\mathbb{E}[Y_k^2]$である. また
$var(\sum_{k=1}^n X_k)=\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n X_k-\mathbb{E}[\sum_{k=1}^n X_k])^2]=\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n Y_k)^2]$.
さて,
$$\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)^2=\sum_{k=1}^n Y_k^2+2\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k \cdots(4.4)$$
であり, (1)により $\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k\in\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$,
(とProp4.13-(1)) $\mathbb{E}[\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Y_jY_k]=\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\mathbb{E}[Y_j]\mathbb{E}[Y_k]=0$.
よって$\{Y_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ならば(4.4)の両辺の$\mathbb{E}[\cdots]$を取れば主張が得られ, $\{Y_k\}_{k=1}^n\not\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ならば(4.4)より$\sum_{k=1}^n Y_k\notin\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$であるので$\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n Y_k)^2]=\infty=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}[Y_k^2]$. ■

**例4.15** $p\in[0,1]$とする. $\{0,1\}$上の確率測度$Be(p)$を次で定める:
$Be(p)(\{0\}):=1-p$, $Be(p)(\{1\}):=p$. (確率$p$のBernoulli分布)
(つまり$Be(p):=B(1,p)$.)
$X$がreal r.v.で$X\sim Be(p)$のとき,
$\mathbb{E}[X]=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p=\mathbb{E}[X^2]$, $var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$
$=p(1-p)$.

さて, $\{X_k\}_{k=1}^n$を独立なreal r.v.'sで$\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $X_k\sim Be(p)$なるものとする(そのような$\{X_k\}_{k=1}^n$は存在する; Thm4.17参照).

claim $S := \sum_{k=1}^{n} X_k \sim B(n,p)$.

∵ $\forall k \in \{0,\cdots,n\}$,

$$P[S=k] = \sum_{\substack{(a_1,\cdots,a_n)\in\{0,1\}^n \\ a_1+\cdots+a_n=k}} P[X_1=a_1,\cdots,X_n=a_n] = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$個

$$= B(n,p)(\{k\}) \quad /\!/ \text{(claim)}$$

するとB(n,p)を分布とするreal r.v.の平均,分散は

$$E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = np, \quad var(S) \underset{\text{Prop 4.14-(2)}}{=} \sum_{k=1}^{n} var(X_k) = np(1-p).$$

Def4.16 (確率変数の$\boxed{\text{無限列}}$の独立性)

各$n\in\mathbb{N}$に対し$d_n\in\mathbb{N}$で$X_n$は$d_n$-dim. r.v.とする.

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: 独立 (independent)

$\overset{def}{\iff}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{X_k\}_{k=1}^{n}$が(Def4.1の意味で)独立.

Thm4.17 (独立確率変数列の存在) $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$とする.
各$n\in\mathbb{N}$, $n\leqq N$に対し,$d_n\in\mathbb{N}$とし$\mu_n$は$\mathbb{R}^{d_n}$上の分布とする.
このとき$\exists(\Omega',\mathcal{F}',P')$:確率空間, また各$n\in\mathbb{N}$, $n\leqq N$に対し$\exists X_n$: $d_n$-dim. r.v., $X_n\sim\mu_n$かつ$\{X_n\}_{n=1}^{N}$は独立.

(∵ $N\in\mathbb{N}$のとき: ノート Thm2.26とThm3.28 ……Fubiniの定理 (Thm4.8-(1))からもう少し頑張れば証明できる.(そう難しくない)
$N=\infty$のとき: ノート Thm3.65とThm3.40 (難しい!))

次に,「ある事象がa.s.に(つまり確率1で)起こること」の証明によく使われる定理(Borel-Cantelliの補題)を与える.
次の定義が必要である:

Def4.18 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset 2^{\Omega}$に対し

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega\in\Omega \mid 無限個のnに対し\omega\in A_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega\in\Omega \mid ある有限個のn以外の全てのnに対し\omega\in A_n\}$$

● $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n, \liminf_{n\to\infty} A_n \in\mathcal{F}$.

Thm4.19 (Borel-Cantelliの補題) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]<\infty \Longrightarrow P[\liminf_{n\to\infty} A_n^c]=1$.

(2) $\{1_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$が独立で$\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]=\infty \Longrightarrow P[\limsup_{n\to\infty} A_n]=1$.

Thm4.19-(2)の証明に次の基本的事実が必要である:

Lemma4.20 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1)$とする.このとき

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_1)\cdot\cdots\cdot(1-p_n)=0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n=\infty.$$

∵ ($\Leftarrow$) $\forall x\in[0,1]$, $0\leqq 1-x\leqq e^{-x}$なので,$x=p_1,\cdots,p_n$として

$$0\leqq(1-p_1)\cdot\cdots\cdot(1-p_n)\leqq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(1-p_1)\cdot\cdots\cdot(1-p_n)=0$.

($\Rightarrow$) $p_n>\frac{1}{2}$となる$n\in\mathbb{N}$が無限個あれば明らかに$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\infty$であるので,$\{n\in\mathbb{N}\mid p_n>\frac{1}{2}\}$は有限集合である,すなわち

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqq N,\ p_n\leqq\frac{1}{2} \quad と仮定してよい.$$

このとき,$\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$, $e^{-2x}\leqq 1-x$であることに注意すると
(実際,$g(x):=1-x-e^{-2x}$とすると$g'(x)=2e^{-2x}-1$より,$g$は$[0,\frac{1}{2}\log 2]$で増加,$[\frac{1}{2}\log 2,\frac{1}{2}]$で減少するので,$x\in[0,\frac{1}{2}]$に対し
$g(x)\geqq\min\{g(0),g(\frac{1}{2})\}=\min\{0,\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\}=0$.)

$n\geqq N$に対し$\exp(-2\sum_{k=N}^{n}p_k)\leqq(1-p_N)\cdot\cdots\cdot(1-p_n)$,従って

$$\sum_{k=1}^{n}p_k\geqq\sum_{k=N}^{n}p_k\geqq-\frac{1}{2}\log((1-p_N)\cdot\cdots\cdot(1-p_n))\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

よって$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\infty$. ■

Thm4.19の証明

(1) $k\in\mathbb{N}$とすると測度の劣加法性(Def4.7の後の注)により,

$$P[\limsup_{n\to\infty}A_n]=P\left[\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty}A_n\right]\leqq P\left[\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right]$$

$$\underset{劣加法性}{\leqq}\sum_{n=k}^{\infty}P[A_n]=\sum_{n=1}^{\infty}P[A_n]-\sum_{n=1}^{k-1}P[A_n]$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \quad (\because \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}P[A_n]<\infty).$$

よって$P[\limsup_{n\to\infty}A_n]=0$であり,

$$(\limsup_{n\to\infty}A_n)^c=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c=\liminf_{n\to\infty}A_n^c$$

であるので$P[\liminf_{n\to\infty}A_n^c]=1-P[\limsup_{n\to\infty}A_n]=1-0=1$.

(2) $n\in\mathbb{N}$とする.$\{\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c\}_{l=n}^{\infty}\subset\mathcal{F}$は$l$について非増加かつ
$\bigcap_{l=n}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c)=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c$なのでProp1.6-(4)が使えて,

$$P\left[\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)^c\right]=P\left[\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c\right]$$

$$\underset{\text{Prop1.6-(4)}}{=}\lim_{l\to\infty}P\left[\bigcap_{k=n}^{l}A_k^c\right]$$

$$=\lim_{l\to\infty}P[1_{A_n}=0,\cdots,1_{A_l}=0]$$

$$\underset{\text{Prop4.13-(1)より}\{1_{A_k}\}_{k=n}^{l}\text{は独立}}{=}\lim_{l\to\infty}P[1_{A_n}=0]\cdot\cdots\cdot P[1_{A_l}=0]$$

$$=\lim_{l\to\infty}(1-P[A_n])\cdot\cdots\cdot(1-P[A_l])$$

$$\underset{\text{Lemma4.20}}{=}0. \quad \therefore P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right]=1-0=1.$$

さらに$\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$は$n$について非増加かつ
$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=\limsup_{n\to\infty}A_n$なので,再びProp1.6-(4)により

$$P[\limsup_{n\to\infty}A_n]=\lim_{n\to\infty}P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right]=\lim_{n\to\infty}1=1. \quad ■$$