確率論I　講義ノート

梶野　直孝

神戸大学理学部数学科

§5 確率変数列の収束概念

次の§6で，独立な$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$で$\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]$を満たすものについて，「収束」

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=\mathbb{E}[X_1]$$

を考えるが，確率変数の「収束」には複数の定式化がある：

Def.5.1 $d\in\mathbb{N}$とし，$X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$をd-dim. r.v.sとする．

(1) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに概収束する($X_n\xrightarrow{a.s.}X$)

$\overset{def}{\iff}\lim_{n\to\infty}X_n=X$ a.s.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに確率収束する($X_n\xrightarrow{P}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geq\varepsilon]=0$.

(3) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXに法則収束するまたは分布収束する($X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$有界連続に対し$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$

$\underset{\text{Thm 2.10-(2)}}{\iff}\forall f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$有界連続に対し$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{P}_{X_n}(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{P}_X(dx)$.

(注 $f:S\to\mathbb{C}$有界$\overset{def}{\iff}\sup_{x\in S}|f(x)|<\infty$.)

(4) $p\in(0,\infty)$とする．$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXにL^p-収束する($X_n\xrightarrow{L^p}X$)

$\overset{def}{\iff}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|X_n-X|^p]=0$.

(5) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$がXにBorel-Cantelliの意味で収束する($X_n\xrightarrow{BC}X$)

$\overset{def}{\iff}\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geq\varepsilon]<\infty$.

注意5.2 上のDef.5.1-(3)において，$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$の定義には各確率変数の分布$\mathbb{P}_{X_n}$と$\mathbb{P}_X$しか関与していないことに注意されたい．従って，$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$の定義は$X,X_1,X_2,\cdots$がそれぞれ$\boxed{\text{別々の}}$確率空間上で定義されている場合にも通用する．

Thm 5.3 $d\in\mathbb{N}$とし，$X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$はd-dim. r.v.sとする．このとき：

$$(X_n\xrightarrow{BC}X)\overset{(1)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{a.s.}X)\overset{(2)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{P}X)\overset{(3)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X)$$
$$(X_n\xrightarrow{L^p}X)\overset{(4)}{\Longrightarrow}(X_n\xrightarrow{P}X)$$
((4)で$p\in(0,\infty)$は任意)

Lemma 5.4 $d\in\mathbb{N}$とし，$X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$はd-dim. r.v.sとする．このとき，

$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow\exists\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$狭義単調増加，$X_{n(k)}\xrightarrow{BC}X$.

☺ $n(0):=0$とし，$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を帰納的に以下で定める：

$n(k):=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n>n(k-1),\ \mathbb{P}[|X_n-X|\geq 2^{-k}]\leq 2^{-k}\}$,

$k=1,2,3,\cdots$. ($X_n\xrightarrow{P}X$により，min{---}中の集合は空ではない．)

すると$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$かつ$\forall k\in\mathbb{N}$, $n(k)<n(k+1)$である．さらに$\varepsilon\in(0,\infty)$に対し，$2^{-N}\leq\varepsilon$となる$N\in\mathbb{N}$をとれば，$\forall k\geq N$, $2^{-k}\leq 2^{-N}\leq\varepsilon$, 従って$\{|X_{n(k)}-X|\geq\varepsilon\}\subset\{|X_{n(k)}-X|\geq 2^{-k}\}$より

$$\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geq\varepsilon]\leq\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geq 2^{-k}]\leq 2^{-k}$$

となるので

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geq\varepsilon]\leq N+\sum_{k=N}^{\infty}2^{-k}<\infty.$$

ゆえに $X_{n(k)}\xrightarrow{BC}X$. ■

Thm 5.3の証明

(1) $X_n\xrightarrow{BC}X$の仮定を$\varepsilon=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{N}$, として用いれば，Borel-Cantelliの第1補題(Thm4.19-(1))により

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}[\Omega_k]=1$, ただし$\Omega_k:=\liminf_{n\to\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{k}\}$.

すると，$\Omega_0:=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$とおけば測度$\mathbb{P}$の劣加法性により

$$\mathbb{P}[\Omega_0^c]=\mathbb{P}[\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k^c]\underset{\text{劣加法性}}{\leq}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[\Omega_k^c]=0$$

であるので$\mathbb{P}[\Omega_0]=1-\mathbb{P}[\Omega_0^c]=1$.

さて，そこで$\omega\in\Omega_0$とするとき，$\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$であることを示せば$X_n\xrightarrow{a.s.}X$が得られたことになる．$\varepsilon\in(0,\infty)$とし，$N\in\mathbb{N}$を$\frac{1}{N}<\varepsilon$となるように取る．$\omega\in\Omega_N=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{N}\}$であるので，$\exists k(\omega)\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq k(\omega)$, $\omega\in\{|X_n-X|<\frac{1}{N}\}$, 従って$|X_n(\omega)-X(\omega)|<\frac{1}{N}<\varepsilon$. ∴ $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$.

(2) $\varepsilon\in(0,\infty)$とする．$X_n\xrightarrow{a.s.}X$より$\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}}\xrightarrow{a.s.}0$であり，$0\leq\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}}\leq 1$, $\mathbb{E}[1]=1<\infty$であるので，Lebesgueの収束定理(DCT, Thm 1.25)とProp1.28により

$$\mathbb{P}[|X_n-X|\geq\varepsilon]=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}}]\xrightarrow[DCT]{n\to\infty}\mathbb{E}[0]=0.$$

よって$X_n\xrightarrow{P}X$.

(3) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$は有界連続とする．背理法で証明するために，$\{\mathbb{E}[f(X_n)]\}_{n=1}^{\infty}$が$\mathbb{E}[f(X)]$に収束しないと仮定する．すると

$\exists\varepsilon\in(0,\infty)$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n\geq N$, $|\mathbb{E}[f(X_n)]-\mathbb{E}[f(X)]|\geq\varepsilon$.

そこで$n(0):=0$とおけば，狭義単調増加列$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を$k=1,2,3,\cdots$に対し帰納的に次で定めることができる：

$n(k):=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n>n(k-1),\ |\mathbb{E}[f(X_n)]-\mathbb{E}[f(X)]|\geq\varepsilon\}$.

さて，仮定$X_n\xrightarrow{P}X$より$X_{n(k)}\xrightarrow{P}X$でもあり，するとLemma5.4より$\exists\{k(l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$狭義単調増加，$X_{n(k(l))}\xrightarrow{BC}X$. そこで(1)より$X_{n(k(l))}\xrightarrow{a.s.}X$, 従ってfの連続性により容易に$f(X_{n(k(l))})\xrightarrow{a.s.}f(X)$が分かり，またfの有界性により$\forall l\in\mathbb{N}$,

$|f(X_{n(k(l))})|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$, $\mathbb{E}[\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|]=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|<\infty$

であるので Lebesgueの収束定理(DCT, Thm1.25)とProp1.28により
$\mathbb{E}[f(X_{n(k(\ell))})] \xrightarrow[\text{DCT}]{\ell\to\infty} \mathbb{E}[f(X)]$. これは $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ の定め方より
$\forall k\in\mathbb{N},\ |\mathbb{E}[f(X_{n(k)})]-\mathbb{E}[f(X)]|\geqq\varepsilon$
であったことに反し，矛盾である．よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$
であることになり，fは任意であったので $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.
(4) $\varepsilon\in(0,\infty)$とすると $\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\geqq\varepsilon\}}\leqq|X_n-X|^p\cdot\varepsilon^{-p}$ なので
両辺の$\mathbb{E}[\cdots]$をとれば $\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]\leqq\varepsilon^{-p}\mathbb{E}[|X_n-X|^p]\xrightarrow{n\to\infty}0$.
よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=0$ となるので，$X_n\xrightarrow{P}X$. ■

Thm 5.5 $d\in\mathbb{N}$とし，$X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$は d-dim. r.v.s とする．このとき：
$X_n\xrightarrow{P}X \iff \forall\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，
$\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，$X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$.
☺ ($\Longrightarrow$) $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ は狭義単調増加とすると，仮定
$X_n\xrightarrow{P}X$ より $X_{n(k)}\xrightarrow{P}X$ であり，Lemma 5.4 より
$\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，$X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{BC}X$.
すると Thm 5.3-(1) より $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$.
($\Longleftarrow$) $\varepsilon\in(0,\infty)$とし，$\{\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]\}_{n=1}^{\infty}$ が0に収束しないと
仮定する．このとき Thm 5.3-(3)の証明と同様にして，
$\exists\delta\in(0,\infty), \exists\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}[|X_{n(k)}-X|\geqq\varepsilon]\geqq\delta. \cdots\cdots (5.1)$$
するとさらに仮定の条件から $\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，
$X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$ となり，従って Thm5.3-(2)より $X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{P}X$
であるので $\lim_{\ell\to\infty}\mathbb{P}[|X_{n(k(\ell))}-X|\geqq\varepsilon]=0$. これは(5.1)に反し
矛盾であるので，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[|X_n-X|\geqq\varepsilon]=0$が分かり，$X_n\xrightarrow{P}X$. ■

系5.6 $d\in\mathbb{N}$とし，$X,\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$は d-dim. r.v.s，また $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$
は連続であるとする．このとき：
(1) $X_n\xrightarrow{a.s.}X \Rightarrow f(X_n)\xrightarrow{a.s.}f(X)$.
(2) $X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)$.
(3) $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X \Rightarrow f(X_n)\xrightarrow{\mathcal{L}}f(X)$.
☺ (1) fの連続性により明らか．
(2) Thm 5.5より，$\forall\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加 に対し，
$\exists\{k(\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加，$X_{n(k(\ell))}\xrightarrow{a.s.}X$，従って(1)
より $f(X_{n(k(\ell))})\xrightarrow{a.s.}f(X)$ となるので，再び Thm 5.5を適用
することで $f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)$ が従う．
(3) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$は有界連続とする．このとき $g\circ f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$は有界
連続であるので $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ により，
$\mathbb{E}[g(f(X_n))]=\mathbb{E}[(g\circ f)(X_n)]\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}[(g\circ f)(X)]=\mathbb{E}[g(f(X))]$.
よって $f(X_n)\xrightarrow{\mathcal{L}}f(X)$. ■

注意5.7 Thm 5.3-(1),(2),(3),(4)の"$\Longrightarrow$"について，逆の"$\Longleftarrow$"は
一般には成立しない．(☺ Example3.54)

§6. 大数の法則

Def.6.1 (独立同分布(i.i.d.)) $d\in\mathbb{N}, N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$とし，$\{X_n\}_{n=1}^{N}$は
d-dim. r.v.s とする．このとき：
$\{X_n\}_{n=1}^{N}$：独立同分布(i.i.d., independent and identically distributed)
$\overset{def}{\iff}$ $\{X_n\}_{n=1}^{N}$は独立で，$\forall n\in\mathbb{N}, n\leqq N$，に対し $\mathcal{L}(X_n)=\mathcal{L}(X_1)$.

● $d\in\mathbb{N}$，μ：$\mathbb{R}^d$上の分布
$\xRightarrow{\text{Thm4.17}}$ $\exists(\Omega^{\mu},\mathcal{F}^{\mu},\mathbb{P}^{\mu})$：確率空間，
$\exists\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$：$(\Omega^{\mu},\mathcal{F}^{\mu},\mathbb{P}^{\mu})$上で定義された i.i.d.
d-dim. r.v.s，$X_1\sim\mu$.

Thm 6.2 (大数の弱法則(WLLN, weak law of large numbers))
$m\in\mathbb{R}$とし，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$は独立で $\forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n]=m$，
かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}}var(X_n)<\infty$ と仮定する．このとき
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}m. \cdots\cdots (6.1)$$
特に，任意の i.i.d. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$に対し(6.1)が成り立つ．
☺ $\varepsilon\in(0,\infty)$とし，$n\in\mathbb{N}$，$S_n:=\sum_{k=1}^{n}X_k$ とする．このとき
$\mathbb{E}[S_n]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k]=nm$ であることに注意すると，
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqq\varepsilon\right] &\underset{\text{Thm5.3-(4)の証明}}{\leqq}\varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|^2\right]=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\mathbb{E}[|S_n-nm|^2]\\ &=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}var(S_n)\underset{\text{Prop4.14-(2)}}{=}\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}var(X_k)\\ &\leqq\frac{1}{\varepsilon^2n}\sup_{k\in\mathbb{N}}var(X_k)\xrightarrow{n\to\infty}0. \cdots\cdots (6.2)\end{aligned}$$
よって $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqq\varepsilon\right]=0$であるので，$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}m$.
$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$が i.i.d.ならば，系2.10により $\forall n\in\mathbb{N}$，
$\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_1]$，$var(X_n)=var(X_1)$ なので，
$\sup_{n\in\mathbb{N}}var(X_n)=var(X_1)<\infty$ であり，よって(6.1)が $m:=\mathbb{E}[X_1]$
で成り立つ． ■

不等式(6.2)の応用として、次を証明しよう。

Thm 6.3 (Weierstrass(ヴァイエルシュトラス)の多項式近似定理)
$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とする。このとき
$\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\exists P(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\{a_k\}_{k=0}^n\subset\mathbb{R}$),
$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

∵ $a=0$, $b=1$ と仮定して証明すればよい。
(実際, そのとき一般の $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の場合でも, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $g(x):=f(a+x(b-a))$ で定めることにより, $\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\exists P(x)$ 多項式, $\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-P(x)|<\varepsilon$.)
例4.15のように, $p\in[0,1]$とし, また $n\in\mathbb{N}$ とし $\{X_k\}_{k=1}^n$ を独立な real r.v.s で $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $X_k\sim Be(p)=B(1,p)$ となるものとする。$S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ とおくと, $S_n\sim B(n,p)$ なので
$$E\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^n f\left(\tfrac{k}{n}\right)P[S_n=k]=\sum_{k=0}^n f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=:B_{f,n}(p). \quad (6.3)$$
($B_{f,n}(p)$ を f に対する n 次 Bernstein 多項式という。)
claim $\lim_{n\to\infty}\sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|=0$.
∵ $\varepsilon\in(0,\infty)$ とする。([0,1]のコンパクト性により) f は [0,1] 上で一様連続であるので, $\exists\delta\in(0,\infty)$,
$$\forall x,y\in[0,1],\ |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad\cdots(6.4)$$
また([0,1]のコンパクト性により) $M:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|<\infty$.
そこで (6.3), (6.4), (6.2) を用いれば,
$$\begin{aligned}|f(p)-B_{f,n}(p)|&=\left|E\left[f(p)-f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right]\right|\le E\left[\left|f(p)-f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right|\right]\\&=E\left[\left|f(p)-f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right|\left(1_{\{|S_n/n-p|<\delta\}}+1_{\{|S_n/n-p|\ge\delta\}}\right)\right]\\&\le\varepsilon+2MP\left[\left|\tfrac{S_n}{n}-p\right|\ge\delta\right]\\&\le\varepsilon+2M\delta^{-2}\frac{p(1-p)}{n}\le\varepsilon+2M\delta^{-2}\frac{1}{n}\end{aligned}$$
となり, これは $n\ge 2M\delta^{-2}\frac{1}{\varepsilon}$ であるような任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\sup_{p\in[0,1]}|f(p)-B_{f,n}(p)|\le 2\varepsilon$ であることを意味する // (claim) ■

実はThm 6.2は次のように $\xrightarrow{P}$ を $\xrightarrow{a.s.}$ に強められる:

Thm 6.4 (大数の強法則(SLLN, strong law of large numbers))
$m\in\mathbb{R}$とし, $\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{L}^2(P)$ は独立で $\forall n\in\mathbb{N}$, $E[X_n]=m$, かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}}var(X_n)<\infty$ と仮定する。このとき
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\xrightarrow{a.s.}m. \quad (6.5)$$
特に, 任意の i.i.d. $\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{L}^2(P)$ に対し(6.5)が成り立つ。

∵ $v:=\sup_{n\in\mathbb{N}}var(X_n)$ とおき, $n\in\mathbb{N}$ に対し $Y_n:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k-m$ とおく。(6.2)により $E[Y_n^2]\le\frac{v}{n}$ であるので,
$$E\left[\sum_{n=1}^\infty Y_{n^2}^2\right]\overset{\text{Prop1.20}}{=}\sum_{n=1}^\infty E[Y_{n^2}^2]\le\sum_{n=1}^\infty\frac{v}{n^2}<\infty.$$
従って Prop1.27-(2) により a.s. に $\sum_{n=1}^\infty Y_{n^2}^2<\infty$ であり, 特に $Y_{n^2}^2\xrightarrow{a.s.}0$, すなわち $Y_{n^2}\xrightarrow{a.s.}0$.
次に $n\in\mathbb{N}$ とし $k(n):=\max\{k\in\mathbb{N}\mid k^2\le n\}$ とおく。すると $k(n)^2\le n<(k(n)+1)^2$ より $\sqrt{n}-1<k(n)\le\sqrt{n}$ であるので, 特に $\lim_{n\to\infty}k(n)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)^2}{n}=1$. さらに $n\in\mathbb{N}$ に対し,
$Y_n-\frac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}=\frac{1}{n}\sum_{l=k(n)^2+1}^n(X_l-m)$ なので
$$\begin{aligned}E\left[\left(Y_n-\tfrac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)^2\right]&=\frac{1}{n^2}var\left(\sum_{l=k(n)^2+1}^n X_l\right)\\&\overset{\text{Prop4.14-(2)}}{=}\frac{1}{n^2}\sum_{l=k(n)^2+1}^n var(X_l)\\&\le\frac{n-k(n)^2}{n^2}v\le\frac{2k(n)+1}{n^2}v\\&\le\frac{2\sqrt{n}+1}{n^2}v\le 3vn^{-3/2}.\end{aligned}$$
よって
$$E\left[\sum_{n=1}^\infty\left(Y_n-\tfrac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)^2\right]\overset{\text{Prop1.20}}{=}\sum_{n=1}^\infty E\left[\left(Y_n-\tfrac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)^2\right]\le\sum_{n=1}^\infty\frac{3v}{n^{3/2}}<\infty$$
なので再び Prop1.27-(2) により $\sum_{n=1}^\infty\left(Y_n-\frac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)^2<\infty$ a.s., 従って特に $\left(Y_n-\frac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)^2\xrightarrow{a.s.}0$, すなわち $Y_n-\frac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\xrightarrow{a.s.}0$. ゆえに前段落の結果と合わせて
$$Y_n=\left(Y_n-\tfrac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\right)+\tfrac{k(n)^2}{n}Y_{k(n)^2}\xrightarrow{a.s.}0+1\cdot 0=0.$$
よって $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k=Y_n+m\xrightarrow{a.s.}0+m=m$. ■

例6.5 (1) $p\in[0,1]$とし, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は i.i.d. real r.v.s で $X_1\sim Be(p)$ とする(「表の確率pのコインを無限回投げる」).
$E[X_1]=E[X_1^2]=p$ なので Thm 6.4 により
(n回のうち表の回数の割合) $=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\xrightarrow{a.s.}p$.
(2) $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は i.i.d. real r.v.s で $\forall k\in\{1,2,3,4,5,6\}$, $P[X_1=k]=\frac{1}{6}$ とする。このとき $\forall k\in\{1,2,3,4,5,6\}$ に対し, Prop4.13-(2)より $\{1_{\{k\}}(X_n)\}_{n=1}^\infty$ は独立であり, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1_{\{k\}}(X_n)\sim Be\left(\frac{1}{6}\right)$ であるので(1)により
(サイコロをn回投げたときの, kの目の回数の割合)
$$=\frac{1}{n}\#\{j\in\{1,\cdots,n\}\mid X_j=k\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n 1_{\{k\}}(X_j)\xrightarrow{a.s.}\frac{1}{6}.$$

i.i.d.に対しては, Thm 6.4よりさらに強く, 次が成り立つ。

Thm 6.6 (i.i.d. r.v.s $\subset\mathcal{L}^1(P)$ に対する大数の強法則)
$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を i.i.d. real r.v.s とする。このとき次が成り立つ:

● $E[|X_1|]<\infty \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} E[X_1]$.

● $E[|X_1|]=\infty \Longrightarrow$ a.s.に $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ において収束しない.

(∵ ノート Thm 3.61)

さらに i.i.d. の場合には Thm 6.4 は次のように精密化できる:

Thm 6.7 (重複対数の法則 (LIL, law of the iterated logarithm))
$\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ は i.i.d. とし, $m:=E[X_1]$, $v:=var(X_1)$ とおく. このとき

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n-nm}{\sqrt{2n\log\log n}}=\sqrt{v},\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n-nm}{\sqrt{2n\log\log n}}=-\sqrt{v},\ \text{a.s.}$$

$(S_n:=\sum_{k=1}^n X_k)$

(証明は非常に難しい(ので省略せざるを得ない).)

§7 分布の収束 ($d\in\mathbb{N}$ とする.)

Def 7.1 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d):=\{\mu \mid \mu$ は $\mathbb{R}^d$ 上の分布$\}$,
$C_b(\mathbb{R}^d):=\{f \mid f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}, f$ は有界連続$\}$ と定める.

以降で主に扱うのは, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ における次の収束概念である.

Def 7.2 (分布の収束) $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とする.
$\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ が μ に(弱)収束する ($\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$)
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$.

● d-dim. r.v.s X と $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ に対し, (cf. Def 5.1-(3))

$$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X \iff \mathcal{L}(X_n)\xrightarrow{\mathcal{L}}\underbrace{\mathcal{L}(X)}_{X\text{の分布}}.$$

Def 7.2 の状況で, 別の収束の仕方を考えることができない訳ではない. 例えば, 次の収束はより自然に思えるかもしれない:

$$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A). \quad\cdots\cdots (7.1)$$

後の Thm 7.11 でみるように, (7.1) は $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ より強い条件になっている. 実際には, (7.1) は強すぎて現象の記述に使えないことが多いため, あまり有用な収束概念ではない. このことは次の例 7.3 からも見てとれる.

例 7.3 $x\in\mathbb{R}^d$ とし, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\delta_x(A):=\mathbb{1}_A(x)$ と定めると, 容易に分かるように $\delta_x\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ である. さて, $x\in\mathbb{R}^d$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}^d$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\delta_{x_n}\xrightarrow{\mathcal{L}}\delta_x \iff \lim_{n\to\infty}x_n=x$.

(2) $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty}\delta_{x_n}(A)=\delta_x(A)$
$\iff \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, x_n=x$.

∵ (1) ($\Longleftarrow$) $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$ とすると f の連続性により
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\delta_{x_n}(dy)=f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\delta_x(dy).$$
($\Longrightarrow$) $f(y):=\min\{1,|y-x|\}$ とおくと $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$ なので
$$\min\{1,|x_n-x|\}=f(x_n)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\delta_{x_n}(dy)\xrightarrow{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\delta_x(dy)=f(x)=0.$$

(2) ($\Longleftarrow$) 明らか.
($\Longrightarrow$) $A=\{x\}$ ととれば $\lim_{n\to\infty}\delta_{x_n}(\{x\})=\delta_x(\{x\})=1$ なので, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |\delta_{x_n}(\{x\})-1|<1$. すると $\forall n\geq N$, $\delta_{x_n}(\{x\})>0$ すなわち $x_n=x$. //

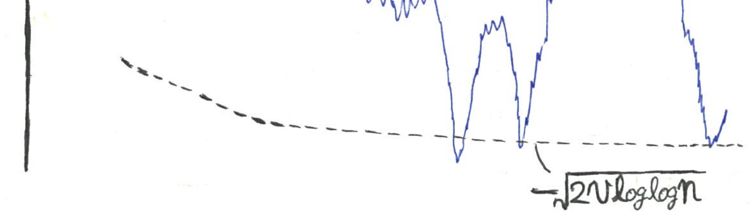
さて, 以後の目標は次の定理の証明を与えることである:

Thm 7.4 (中心極限定理 (CLT, central limit theorem))
$\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ は i.i.d. とし, $m:=E[X_1]$, $v:=var(X_1)$ とおく.

(1) $\mathcal{L}\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,v)$. $(S_n:=\sum_{k=1}^n X_k)$

(2) $v>0$ とする. このとき $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}\leq x\right]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}<x\right]=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{y^2}{2v}}dy.$$

Thm 6.7 と Thm 7.4 を見比べると:

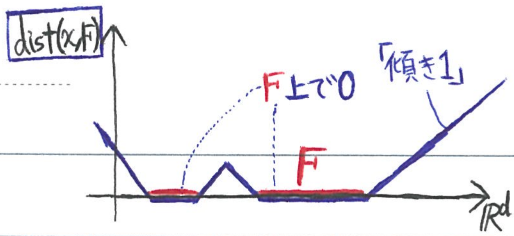


$v=var(X_1)>0$ ならば:

● a.s. でみると, $\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}$ は $\pm\sqrt{2v\log\log n}$ の間をいつまでも振動し続ける.

● しかし振幅 $\sqrt{2v\log\log n}$ の増大は極めて遅く, 分布 $\mathcal{L}\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}}\right)$ は収束してくれる.

● 極限分布 $N(0,v)$ は $v=var(X_1)$ 以外の情報に依存しない.



まず，§7の残りで分布の収束に関する基本的な事実を幾つか証明する．

Lemma 7.5 Fを$\mathbb{R}^d$の閉集合，$F\neq\emptyset$とし，各$n\in\mathbb{N}$に対し $f_n:\mathbb{R}^d\to[0,1]$を次で定める：

$$f_n(x):=\min\{1,\ n\cdot \mathrm{dist}(x,F)\},\quad \mathrm{dist}(x,F):=\inf_{y\in F}|x-y|.$$

このとき$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C_b(\mathbb{R}^d)$であり，また$\forall x\in\mathbb{R}^d$に対し $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le 1$ かつ $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1_{\mathbb{R}^d\setminus F}(x)$.

☺ まず，次を示そう．

claim1 $\forall x\in F$, $\mathrm{dist}(x,F)=0$であり，$\forall x\in\mathbb{R}^d\setminus F$, $\mathrm{dist}(x,F)>0$.

☺ $\emptyset\neq\{|x-y|\mid y\in F\}\subset[0,\infty)$ より $\mathrm{dist}(x,F)\in[0,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}^d$.
$x\in F$ならば $\mathrm{dist}(x,F)\le|x-x|=0$より $\mathrm{dist}(x,F)=0$.
$x\in\mathbb{R}^d\setminus F$ならば，$\mathbb{R}^d\setminus F$が$\mathbb{R}^d$の開集合であることから
$\exists\varepsilon\in(0,\infty)$, $B_d(x,\varepsilon):=\{y\in\mathbb{R}^d\mid |y-x|<\varepsilon\}\subset\mathbb{R}^d\setminus F$
であり，従って$\forall y\in F$, $y\notin B_d(x,\varepsilon)$ すなわち $|y-x|\ge\varepsilon$.
ゆえに $\mathrm{dist}(x,F)=\inf_{y\in F}|x-y|\ge\varepsilon>0$. //(claim1)

claim2 $\forall x,y\in\mathbb{R}^d$, $|\mathrm{dist}(x,F)-\mathrm{dist}(y,F)|\le|x-y|$.

☺ $x,y\in\mathbb{R}^d$, $z\in F$とすると3角不等式により
$|y-z|\ge|x-z|-|x-y|\ge\mathrm{dist}(x,F)-|x-y|$
であるので $z\in F$について下限をとれば
$\mathrm{dist}(y,F)\ge\mathrm{dist}(x,F)-|x-y|$, すなわち
$\mathrm{dist}(x,F)-\mathrm{dist}(y,F)\le|x-y|$. xとyを入れ替えれば
$\mathrm{dist}(y,F)-\mathrm{dist}(x,F)\le|y-x|=|x-y|$.
両者を合わせて $|\mathrm{dist}(x,F)-\mathrm{dist}(y,F)|\le|x-y|$. //(claim2)

すると，$g(t):=\min\{1,t\}$で与えられる $g:[0,\infty)\to[0,1]$が連続単調非減少であることと $f_n(x)=g(n\,\mathrm{dist}(x,F))$に注意すれば，claim2より$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C_b(\mathbb{R}^d)$であり，また$\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le 1$. さらにclaim1より，$x\in F$ならば $f_n(x)=0\xrightarrow{n\to\infty}0=1_{\mathbb{R}^d\setminus F}(x)$, $x\in\mathbb{R}^d\setminus F$ならば $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}1=1_{\mathbb{R}^d\setminus F}(x)$. ■

Prop 7.6 $C_c(\mathbb{R}^d):=\{f\mid f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R},\ f\text{は連続},\ \exists N\in\mathbb{N},\ f|_{\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d}=0\}$ とおく．$\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$とし，$\forall f\in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\nu$ と仮定する．このとき $\mu=\nu$.

注 $\boxed{C_c(\mathbb{R}^d)\subset C_b(\mathbb{R}^d)}$である．実際，$f\in C_c(\mathbb{R}^d)$とし$N\in\mathbb{N}$を $f|_{\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d}=0$となるように取ると，$[-N,N]^d$のコンパクト性により
$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|=\sup_{x\in[-N,N]^d}|f(x)|=\max_{x\in[-N,N]^d}|f(x)|<\infty$. $\therefore f\in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Prop 7.6の証明

Uを$\mathbb{R}^d$の開集合とする．$N\in\mathbb{N}$とし$F:=\mathbb{R}^d\setminus(U\cap(-N,N)^d)$とおくと，$F$は$\mathbb{R}^d$の閉集合，$F\neq\emptyset$であり，そこでLemma 7.5のような$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C_b(\mathbb{R}^d)$が取れる．ところが$\forall n\in\mathbb{N}$に対し，$\mathbb{R}^d$上で $0\le f_n\le f_{n+1}\le 1_{U\cap(-N,N)^d}$ なので $f_n|_{\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d}=0$,
従って $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C_c(\mathbb{R}^d)$ であり，そこでμ,νに対する仮定から

$$\mu(U\cap(-N,N)^d)=\int_{\mathbb{R}^d}1_{U\cap(-N,N)^d}\,d\mu\underset{MCT}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,d\mu$$
$$\nu(U\cap(-N,N)^d)=\int_{\mathbb{R}^d}1_{U\cap(-N,N)^d}\,d\nu\underset{MCT}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,d\nu$$

仮定より

さらにProp 1.6-(3)を用いて$N\to\infty$とすれば，
$\mu(U)=\lim_{N\to\infty}\mu(U\cap(-N,N)^d)=\lim_{N\to\infty}\nu(U\cap(-N,N)^d)=\nu(U)$.
よって，$\{U\mid U\text{は}\mathbb{R}^d\text{の開集合}\}$が乗法族であることと $\sigma_{\mathbb{R}^d}(\{U\mid U\text{は}\mathbb{R}^d\text{の開集合}\})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$に注意すると，確率測度の一意性定理(Thm 4.6)が適用でき，$\mu=\nu$を得る． ■

系7.7 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$とする．このとき，
$\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ かつ $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\nu$ ならば $\mu=\nu$.

☺ $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ かつ $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\nu$ であるので，$\forall f\in C_b(\mathbb{R}^d)$に対し
$\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\nu$.
よってProp 7.6により $\mu=\nu$. ■

Prop 7.8 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$とし，次を仮定する：
$\forall\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $\exists\{k(l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加,
$\mu_{n(k(l))}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$. このとき $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

☺ $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$とし，$\{\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n\}_{n=1}^\infty$が$\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu$に収束しないと仮定する．このときThm 5.3-(3)の証明と同様にして，
$\exists\varepsilon\in(0,\infty)$, $\exists\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加,
$\forall k\in\mathbb{N}$, $\left|\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_{n(k)}-\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu\right|\ge\varepsilon$. ……(7.2)
ところが仮定により$\exists\{k(l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加,
$\mu_{n(k(l))}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ であり，すると$f\in C_b(\mathbb{R}^d)$より $\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_{n(k(l))}=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu$.
これは(7.2)に反し矛盾であるので，$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu$
が従い，$f\in C_b(\mathbb{R}^d)$は任意であるので $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ である． ■

下記の Thm 7.11, Thm 7.12 のために次のDef 7.9, Thm 7.10が必要：

Thm 7.11の証明への注 (ノート Problems 0.1, 0.2)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\infty,\infty]$とする.

(1) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \leqq b_n$ならば
$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} b_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ならば $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Def 7.9 (分布関数) $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$に対し$F_\mu:\mathbb{R}^d\to[0,1]$を
$$F_\mu(x_1,\cdots,x_d) := \mu\big((-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_d]\big)$$
で定め, これをμの<u>分布関数</u>(distribution function)という.

Thm 7.10 $\mathcal{P}(\mathbb{R})\ni\mu\longmapsto F_\mu$ は, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$から次の集合への全単射
$\{F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid F$は右連続, 単調非減少, $\lim_{x\to\infty}F(x)=1, \lim_{x\to-\infty}F(x)=0\}$.

(注 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が<u>右連続</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{y\downarrow x}F(y)=F(x)$.
ただしここで$a\in\mathbb{R}$に対し,
$\lim_{y\downarrow x}F(y)=a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon\in(0,\infty), \exists\delta\in(0,\infty)$,
$\forall y\in(x,x+\delta)$, $|F(y)-a|<\varepsilon$.)

(ノート Prop 2.13, Thm 2.14, Cor 2.17.
またThm 7.10の$\mathbb{R}^d$版も成り立つ: ノート Prop 2.19, Thm 2.20)

Thm 7.11 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$に対し次の(1)〜(6)は全て互いに同値である:

(1) $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

(2) $\mathbb{R}^d$の任意の開集合Uに対し $\liminf_{n\to\infty}\mu_n(U)\geqq\mu(U)$.

(3) $\mathbb{R}^d$の任意の閉集合Fに対し $\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqq\mu(F)$.

(4) $\mu(\partial A)=0$であるような任意の$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$に対し$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$.

(5) F_μがxにおいて連続であるような任意の$x\in\mathbb{R}^d$に対し
$$\lim_{n\to\infty}F_{\mu_n}(x)=F_\mu(x).$$

(6) $\forall f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$.

(<u>(4)への注</u> $A\subset\mathbb{R}^d$に対し$\partial A := \overline{A}\setminus \mathrm{int}A$を$\mathbb{R}^d$における$A$の<u>境界</u>という. ここで$\overline{A}$は$A$の$\mathbb{R}^d$における<u>閉包</u>, $\mathrm{int}A$はAの$\mathbb{R}^d$における<u>内部</u>(Aを含む$\mathbb{R}^d$の閉集合のうち最小のもの, Aに含まれる$\mathbb{R}^d$の開集合のうち最大のもの)をそれぞれ表す.)

Thm 7.11の証明 (ページ右上の注も参照のこと)

$\boxed{(1)\Longrightarrow(2)}$ Uを$\mathbb{R}^d$の開集合とする. $U=\mathbb{R}^d$なら(2)の主張は自明なので, $U\neq\mathbb{R}^d$と仮定してよい. このとき$F:=\mathbb{R}^d\setminus U\neq\phi$で$F$は$\mathbb{R}^d$の閉集合なので, Lemma 7.5のような$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_b(\mathbb{R}^d)$を取ることができる. すると$k\in\mathbb{N}$に対し, $\mathbb{R}^d$上$0\leqq f_k\leqq f_{k+1}\leqq 1_U$であるので, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mu_n(U)\geqq\int_{\mathbb{R}^d}f_k\,d\mu_n$であり, よって$\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$を用いて
$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(U)\geqq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_k\,d\mu_n=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_k\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}^d}f_k\,d\mu.$$
$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_k\,d\mu \overset{}{\underset{\text{MCT}}{=\!=}} \int_{\mathbb{R}^d}1_U\,d\mu=\mu(U)$であるので, 前行の不等式で$k\to\infty$とすれば $\liminf_{n\to\infty}\mu_n(U)\geqq\mu(U)$を得る.

$\boxed{(2)\Longrightarrow(3)}$ Fを$\mathbb{R}^d$の閉集合とすると, $U:=\mathbb{R}^d\setminus F$は$\mathbb{R}^d$の開集合なので
$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)=\limsup_{n\to\infty}(1-\mu_n(U))=1+\limsup_{n\to\infty}(-\mu_n(U))$$
$$=1-\liminf_{n\to\infty}\mu_n(U)\underset{(2)}{\leqq}1-\mu(U)=\mu(F).$$

$\boxed{(3)\Longrightarrow(2)}$ Uを$\mathbb{R}^d$の開集合とすると, $F:=\mathbb{R}^d\setminus U$は$\mathbb{R}^d$の閉集合なので
$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(U)=\liminf_{n\to\infty}(1-\mu_n(F))=-\limsup_{n\to\infty}(\mu_n(F)-1)$$
$$=-\Big(\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)-1\Big)=1-\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)$$
$$\underset{(3)}{\geqq}1-\mu(F)=\mu(U).$$

$\boxed{(3)\Longrightarrow(4)}$ (3)⇒(2)を既に上で示したので, (2), (3)の両方が成立すると仮定してよい. そこで$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$が$\mu(\partial A)=0$を満たすとき,
$$\mu(A)\leqq\mu(\overline{A})=\mu(\mathrm{int}A)+\mu(\partial A)=\mu(\mathrm{int}A)+0=\mu(\mathrm{int}A)$$
$$\underset{(2)}{\leqq}\liminf_{n\to\infty}\mu_n(\mathrm{int}A)\leqq\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A)\leqq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)$$
$$\leqq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{A})\underset{(3)}{\leqq}\mu(\overline{A})=\mu(\mathrm{int}A)\leqq\mu(A)$$
であるので$\mu(A)=\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)=\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$.

$\boxed{(4)\Longrightarrow(5)}$ $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$とし, F_μはxにおいて連続と仮定する. $I:=(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_d]$とおくと容易に分かるように$\mathrm{int}I=(-\infty,x_1)\times\cdots\times(-\infty,x_d)$であり, そこでProp 1.6-(3)により
$$\mu(\mathrm{int}I)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\big(-\infty,x_1-\tfrac{1}{n}\big]\times\cdots\times\big(-\infty,x_d-\tfrac{1}{n}\big]\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}F_\mu\Big(x_1-\tfrac{1}{n},\cdots,x_d-\tfrac{1}{n}\Big)\underset{F_\mu\text{の}x\text{における連続性}}{=\!=\!=}F_\mu(x)$$
$$=\mu(I).$$
よって, $\overline{I}=I$なので$\mu(\partial I)=\mu(I\setminus\mathrm{int}I)=\mu(I)-\mu(\mathrm{int}I)=0$であり, 故に(4)により$F_{\mu_n}(x)=\mu_n(I)\xrightarrow[n\to\infty]{(4)}\mu(I)=F_\mu(x)$.

$\boxed{(6)\Longrightarrow(1)}$ $k\in\mathbb{N}$とし, $g_k:\mathbb{R}^d\to[0,1]$を$g_k(x):=(\min\{k-|x|,1\})^+$で定めると, 明らかに$g_k$は連続, $|x|\leqq k-1$なら$g_k(x)=1$, $|x|\geqq k$なら$g_k(x)=0$, また$\mathbb{R}^d$上$0\leqq g_k\leqq g_{k+1}\leqq1$である.
さて, $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$とし$M:=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$とおく. すると$\mathbb{R}^d$上$f+M\geqq0$であり, また$(f+M)g_k\in C_c(\mathbb{R}^d)$であるので(6)の仮定により
$$\left.\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n+M&=\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)\,d\mu_n\\
&\underset{(f+M\geqq0,\ g_k\leqq1)}{\geqq}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)g_k\,d\mu_n\\
&\underset{(6)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)g_k\,d\mu_n\\
&\underset{(6)}{=}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)g_k\,d\mu
\end{aligned}\right\}\cdots(7.3)$$
$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)g_k\,d\mu\underset{\text{MCT}}{=\!=}\int_{\mathbb{R}^d}(f+M)\cdot1\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu+M$
であるので, (7.3)で$k\to\infty$とした後両辺に$-M$を加えることで
$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n\geqq\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu$を得る. さらに$f$の代わりに$-f$とすれば
$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n=-\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(-f)\,d\mu_n\leqq-\int_{\mathbb{R}^d}(-f)\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu$$
$$\leqq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n\leqq\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n.$$
$\therefore\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu=\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n=\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\mu_n$,
すなわち$\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

(5)⇒(6) $d=1$の場合のみ証明する.(一般の場合は(I-H) Thm4.10)
$C_\mu := \{a\in\mathbb{R} \mid \mu(\{a\})=0\}$とおく. F_μは非減少であることを思い出そう.

● $\forall x\in C_\mu$, F_μはxにおいて連続.

(∵) $x\in C_\mu$とする. $\mu(\{x\})=0$なのでProp1.6-(3)より
$F_\mu(x)=\mu((-\infty,x])=\mu((-\infty,x))+\mu(\{x\})$
$\overset{\text{Prop1.6(3)}}{=} \lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x-\frac{1}{n}])+0=\lim_{n\to\infty}F_\mu(x-\frac{1}{n})$.
そこで$\varepsilon\in(0,\infty)$に対し$\exists N\in\mathbb{N}$, $F_\mu(x)-F_\mu(x-\frac{1}{N})<\varepsilon$となり,
すると$\forall y\in[x-\frac{1}{N},x)$, $0\le F_\mu(x)-F_\mu(y)\le F_\mu(x)-F_\mu(x-\frac{1}{N})<\varepsilon$.
これは$\lim_{y\uparrow x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$を意味し, Thm7.10より$\lim_{y\downarrow x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$であることと合わせて$\lim_{y\to x}F_\mu(y)=F_\mu(x)$, つまり$F_\mu$は$x$において連続. //

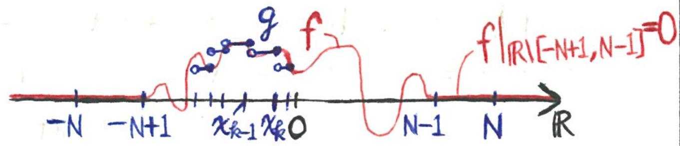
● $\mathbb{R}\setminus C_\mu$は可算集合である.

(∵) $D_{\mu,n}:=\{a\in\mathbb{R}\mid\mu(\{a\})\ge\frac{1}{n}\}$とおくと$\mathbb{R}\setminus C_\mu=\bigcup_{n=1}^\infty D_{\mu,n}$なので, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\#D_{\mu,n}\le n$を示せばよい. 実際, $n\in\mathbb{N}$とし$\#D_{\mu,n}\ge n+1$と仮定すると, $D_{\mu,n}$は相異なる$(n+1)$個の元$a_1,\cdots,a_{n+1}$を持つことになり, このとき$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$より
$1=\mu(\mathbb{R})\ge\mu(\bigcup_{k=1}^{n+1}\{a_k\})=\sum_{k=1}^{n+1}\mu(\{a_k\})\ge(n+1)\cdot\frac{1}{n}>1$
となるので矛盾する. よって$\#D_{\mu,n}\le n$, 特に$\mathbb{R}\setminus C_\mu=\bigcup_{n=1}^\infty D_{\mu,n}$は(有限集合の可算和なので)可算集合である. //

● C_μは$\mathbb{R}$において稠密, つまり$\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b\Rightarrow C_\mu\cap(a,b)\ne\emptyset$.

(∵) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とすると, (a,b)は非可算なので可算集合$\mathbb{R}\setminus C_\mu$に含まれることができない, すなわち$\exists x\in(a,b)$, $x\notin\mathbb{R}\setminus C_\mu$, となり, すると$x\in C_\mu\cap(a,b)$, 特に$C_\mu\cap(a,b)\ne\emptyset$. //

さて, (6)を示すために, $f\in C_c(\mathbb{R})$とし$N\in\mathbb{N}$を$f|_{\mathbb{R}\setminus[-N+1,N-1]}=0$となるように取る. $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. ($[-N,N]$のコンパクト性により) fは$[-N,N]$上で一様連続であるので, $\exists\delta\in(0,1)$, $\forall x,y\in[-N,N]$, $|x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 実は今, この$\delta$に対し
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \quad\cdots\cdots(7.4)$$
((∵) $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta$とする. $x,y\in[-N,N]$ならばδの取り方より$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. $x\in\mathbb{R}\setminus[-N,N]$もしくは$y\in\mathbb{R}\setminus[-N,N]$ならば, $|x-y|<\delta<1$より$x,y\in\mathbb{R}\setminus[-N+1,N-1]$であり, 従って$N$の取り方から$f(x)=f(y)=0$となるので$|f(x)-f(y)|=0<\varepsilon$.)



(f: $[-N,N]$上で一様連続, より$\mathbb{R}$上でも一様連続((7.4)))

C_μは$\mathbb{R}$において稠密なので, 各$k\in\mathbb{Z}$に対し$x_k\in C_\mu$を$k\frac{\delta}{2}<x_k<(k+1)\frac{\delta}{2}$となるように選ぶことができ, このとき
$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad x_k<x_{k+1}<x_k+\delta. \quad\cdots\cdots(7.5)$$
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を次で定義する:
$$g:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x_k)\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}. \quad\cdots\cdots(7.6)$$
($f|_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]}=0$より, $|k|\ge\frac{2N}{\delta}+1$なる$k\in\mathbb{Z}$に対しては$f(x_k)=0$, 従って(7.6)の右辺の和は実際には有限和である.)

claim1 $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

(∵) $x\in\mathbb{R}$とする. このとき$\exists_1 k\in\mathbb{Z}$, $x\in(x_{k-1},x_k]$であり, すると$|x-x_k|<\delta$, また$g(x)=f(x_k)$であるので, (7.4)により
$|f(x)-g(x)|=|f(x)-f(x_k)|<\varepsilon$. //(claim1)

claim2 $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu$.

(∵) 各$k\in\mathbb{Z}$に対し, $x_{k-1},x_k\in C_\mu$よりF_μはx_{k-1},x_kにおいて連続であり, 従って(5)により
$\mu_n((x_{k-1},x_k])=F_{\mu_n}(x_k)-F_{\mu_n}(x_{k-1})$
$\xrightarrow[n\to\infty]{(5)}F_\mu(x_k)-F_\mu(x_{k-1})=\mu((x_{k-1},x_k])$.
$\therefore\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n=\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|<1+2N/\delta}f(x_k)\mu_n((x_{k-1},x_k])$
$\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|<1+2N/\delta}f(x_k)\mu((x_{k-1},x_k])=\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu$. //(claim2)

さて, するとclaim2により$\exists l\in\mathbb{N}$, $\forall n\ge l$, $|\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu|<\varepsilon$であり, よってclaim1を用いれば$\forall n\ge l$に対し
$|\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu|$
$=|\int_{\mathbb{R}}(f-g)\,d\mu_n+(\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu)+\int_{\mathbb{R}}(g-f)\,d\mu|$
$\le\int_{\mathbb{R}}|f-g|\,d\mu_n+|\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu_n-\int_{\mathbb{R}}g\,d\mu|+\int_{\mathbb{R}}|g-f|\,d\mu$
$\underset{\substack{\text{claim1}\\ n\ge l}}{<}\varepsilon\mu_n(\mathbb{R})+\varepsilon+\varepsilon\mu(\mathbb{R})=3\varepsilon$.
ゆえに$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu$. ■

Thm 7.12 $K\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$とするとき, 次の(1), (2)は互いに同値である:
(1) Kは緊密(tight), すなわち$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)=0$.
(2) $\forall\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset K$, $\exists\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

(注 $K=\emptyset$のときは(1)における$\sup_{\mu\in K}(\cdots)$は0と約束する.)

(∵) **(2)⇒(1)** $\{\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)\}_{N=1}^\infty$が非増加であることに注意して, $\varepsilon:=\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)$とおく. 明らかに$\varepsilon\ge0$.
背理法で証明するために, $\varepsilon>0$と仮定する. するとこのとき,

各$n\in\mathbb{N}$に対し$\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-n,n]^d)\geqq\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2}$であるので$\mu_n\in K$を$\mu_n(\mathbb{R}^d\setminus[-n,n]^d)>\frac{\varepsilon}{2}$となるように取ることができる. そこで(2)よりこの$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$に対し$\exists\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$狭義単調増加, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$となるが, さらに$N\in\mathbb{N}$に対し

$$\frac{\varepsilon}{2}\leqq\limsup_{k\to\infty}\mu_{n(k)}(\mathbb{R}^d\setminus[-n(k),n(k)]^d)$$
$$\leqq\limsup_{k\to\infty}\mu_{n(k)}(\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d)\quad\left(\because\ k\geqq N\text{ に対し }n(k)\geqq N\text{ より }\mathbb{R}^d\setminus[-n(k),n(k)]^d\subset\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\right)$$
$$\leqq\mu(\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d)\quad\left(\because\ \mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\underset{\text{閉}}{\subseteq}\mathbb{R}^d,\ \mu_{n(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu,\ \text{Thm7.11-(3)}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{Prop1.6-(4)}]{N\to\infty}\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\mathbb{R}^d\setminus(-N,N)^d\right)=\mu(\phi)=0.$$

$\therefore\ \frac{\varepsilon}{2}\leqq 0$となり, $\varepsilon>0$と仮定していたことに矛盾する. よって$\varepsilon=0$, すなわち$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mu\in K}\mu(\mathbb{R}^d\setminus[-N,N]^d)=0$.

(1)$\Longrightarrow$(2) $d=1$の場合のみ証明する.(一般の場合は(I-1) Thm4.12)

$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$F_n:=F_{\mu_n}$とおく. $\mathbb{Q}$が可算無限集合であることに注意して, 全単射$\mathbb{N}\ni k\longmapsto q_k\in\mathbb{Q}$を取る.

$\{n(0,l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を$n(0,l):=l$と定め, 各$k\in\mathbb{N}$に対し狭義単調増加な$\{n(k,l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$を次のようにして帰納的に定める:

$\{n(k-1,l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$は既に定義済として, $\{F_{n(k-1,l)}(q_k)\}_{l=1}^{\infty}\subset[0,1]$なのでBolzano-Weierstrassの定理により$\exists\{l(j)\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$狭義単調増加, $\exists\lim_{j\to\infty}F_{n(k-1,l(j))}(q_k)\in\mathbb{R}$. そこでここで現れた$\{n(k-1,l(j))\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$なる狭義単調増加列を(添字を$j$から$l$に変更して) $\{n(k,l)\}_{l=1}^{\infty}$と定める.

$$\begin{array}{l}
\{\ 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ \cdots\cdots\}\\
\qquad\qquad\qquad\cup\\
\{n(1,1),n(1,2),n(1,3),n(1,4),n(1,5),\cdots\cdots\}\\
\qquad\qquad\qquad\cup\\
\{n(2,1),n(2,2),n(2,3),n(2,4),n(2,5),\cdots\cdots\}\\
\qquad\qquad\qquad\cup\\
\{n(3,1),n(3,2),n(3,3),n(3,4),n(3,5),\cdots\cdots\}\\
\qquad\qquad\qquad\cup\\
\{n(4,1),n(4,2),n(4,3),n(4,4),n(4,5),\cdots\cdots\}\\
\qquad\qquad\qquad\cup\\
\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{array}$$

$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \exists\lim_{l\to\infty}F_{n(k,l)}(q_k)\in\mathbb{R}}$ (7.7)

$\{n(l)\}_{l=1}^{\infty}$ $(n(l):=n(l,l))$
(対角線論法)

そこで$n(l):=n(l,l)$と定めると, $\{n(l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$は狭義単調増加であり, また$\forall k\in\mathbb{N}$に対し$\{n(l)\}_{l=k}^{\infty}$は$\{n(k,l)\}_{l=1}^{\infty}$の部分列なので(7.7)により$\exists\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q_k)\in\mathbb{R}$. すなわち:

$$\boxed{\exists\{n(l)\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}\text{ 狭義単調増加},\quad\forall q\in\mathbb{Q},\ \rho(q):=\exists\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)\in[0,1].}$$

さて, $F:\mathbb{R}\to[0,1]$を各$x\in\mathbb{R}$に対し

$$F(x):=\inf_{q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(q)\qquad\text{により定義する.}$$

● Fは単調非減少($\because\ x\leqq y\Rightarrow\mathbb{Q}\cap(x,\infty)\supset\mathbb{Q}\cap(y,\infty)\Rightarrow F(x)\leqq F(y)$)

● Fは右連続.

$\because$ $x\in\mathbb{R}$とする. $\varepsilon\in(0,\infty)$とすると$\exists q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$, $\rho(q)<F(x)+\varepsilon$であるが, このとき$\forall y\in(x,q)$に対し, $q\in\mathbb{Q}\cap(y,\infty)$より$F(y)\leqq\rho(q)$, 従って$F(x)\leqq F(y)\leqq\rho(q)<F(x)+\varepsilon$. $\therefore\ \lim_{y\downarrow x}F(y)=\underline{F(x).}$ //

● $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.

$\because$ $\varepsilon\in(0,\infty)$とする. (1)(Kは緊密)より,

$$\exists N\in\mathbb{N},\quad\sup_{l\in\mathbb{N}}\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N])<\varepsilon.\quad\text{(7.8)}$$

すると$x\in[N,\infty)$に対し, $\forall q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$, $[-N,N]\subset(-\infty,q]$, 従って

$$\rho(q)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)=\lim_{l\to\infty}\mu_{n(l)}((-\infty,q])$$
$$\geqq\limsup_{l\to\infty}\mu_{n(l)}([-N,N])=\limsup_{l\to\infty}(1-\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N]))\overset{(7.8)}{\geqq}1-\varepsilon$$

であるので$1\geqq F(x)=\inf_{q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(q)\geqq 1-\varepsilon$.

他方$x\in(-\infty,-N)$に対しては, $q\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)$を$q<-N$となるように取ることができ, すると$(-\infty,q]\subset\mathbb{R}\setminus[-N,N]$となるので

$$0\leqq F(x)\leqq\rho(q)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)=\lim_{l\to\infty}\mu_{n(l)}((-\infty,q])$$
$$\leqq\liminf_{l\to\infty}\mu_{n(l)}(\mathbb{R}\setminus[-N,N])\overset{(7.8)}{\leqq}\varepsilon.$$

以上より$\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}\underline{F(x)=0.}$ //

Fの上記の3性質とThm7.10から, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $F=F_\mu$.

<u>claim</u> $\mu_{n(l)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

$\because$ Thm7.11-"(5)$\Rightarrow$(1)"より, $x\in\mathbb{R}$でFはxにおいて連続であると仮定して, $\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=F(x)$を示せばよい. $p<q<x<r$を満たす$p,q,r\in\mathbb{Q}$を任意に取る. このとき

$$F(p)\leqq\rho(q)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(q)\leqq\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)$$
$$\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(r)=\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(r)=\rho(r).$$

$\lim_{y\uparrow x}F(y)=F(x)$と仮定しているので, 上記の不等式において$p\uparrow x$とし$\inf_{r\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}$を取れば

$$F(x)=\lim_{\mathbb{Q}\ni p\uparrow x}F(p)\leqq\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)\leqq\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)$$
$$\leqq\inf_{r\in\mathbb{Q}\cap(x,\infty)}\rho(r)=F(x)$$

となるので, $F(x)=\limsup_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=\liminf_{l\to\infty}F_{n(l)}(x)=\underline{\lim_{l\to\infty}F_{n(l)}(x).}$ //

以上で(1)$\Longrightarrow$(2)が示せ, Thm7.12の証明が完了した. ■

§8 特性関数とその性質, 中心極限定理の証明

記号 ● 本§ではiは虚数単位を表すと約束する.

● $z=x+iy\in\mathbb{C}$ $(x,y\in\mathbb{R})$に対し$\mathrm{Re}(z):=x$, $\mathrm{Im}(z):=y$, $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}$, $\bar{z}:=x-iy$とおき, それぞれzの<u>実部</u>, <u>虚部</u>, <u>絶対値</u>, <u>複素共役</u>という. $z\bar{z}=|z|^2$に注意.

8.0 $\mathbb{C}$-値関数の積分の定義と基本性質

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする.

Def 8.1 $f: X\to\mathbb{C}$ とする.

f が $\mathcal{M}$-可測 $\overset{def}{\iff} \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),\ f^{-1}(A)\in\mathcal{M}$.

($\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の同一視により, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と同一視される)

Prop 8.2 $f: X\to\mathbb{C}$ とするとき,

f が $\mathcal{M}$-可測 $\iff$ $Re(f), Im(f)$ が ($\mathbb{R}$-値関数として) $\mathcal{M}$-可測.

∵ f が $\mathcal{M}$-可測 $\iff \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),\ f^{-1}(A)\in\mathcal{M}$

$\overset{\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2}{\iff} \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ (Re(f),Im(f))^{-1}(A)\in\mathcal{M}$

Prop2.3と全く同様 $\iff$ $Re(f), Im(f)$ が $\mathcal{M}$-可測. ▨

系 8.3 $f,g: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測ならば,

$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$

により定義される $f+g, f\cdot g: X\to\mathbb{C}$ も $\mathcal{M}$-可測.

∵ $\mathbb{C}$ における和と積の定義により

$Re(f+g)=Re(f)+Re(g)$, $Im(f+g)=Im(f)+Im(g)$,

$Re(fg)=Re(f)Re(g)-Im(f)Im(g)$,

$Im(fg)=Re(f)Im(g)+Im(f)Re(g)$

であり, Prop8.2 と Prop1.12 によりこれらは全て $\mathcal{M}$-可測である. 従って Prop8.2 を再度用いることにより $f+g$, $f\cdot g$ が $\mathcal{M}$-可測であることが分かる. ▨

Lemma 8.4 $f: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測ならば,

$|f|: X\to[0,\infty)$ もまた $\mathcal{M}$-可測.

∵ $G:\mathbb{C}\to[0,\infty)$ を $G(z):=|z|$ で定めると, $z,w\in\mathbb{C}$ に対し3角不等式より $|z|\leqq|z-w|+|w|$ かつ $|w|\leqq|w-z|+|z|$, すなわち $|G(z)-G(w)|=||z|-|w||\leqq|z-w|$ となるので, G は $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ 上の $\mathbb{R}$-値連続関数であり, 従って Lemma1.15 により G は $\mathcal{B}(\mathbb{C})$-可測である.

すると $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $|f|=G\circ f$ に注意すれば,

$|f|^{-1}(A)=(G\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(G^{-1}(A))\in\mathcal{M}$

であることが, G: $\mathcal{B}(\mathbb{C})$-可測 より $G^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ であることと $f: X\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{M}$-可測であることから分かる.

よって $|f|$ も $\mathcal{M}$-可測. ▨

Def 8.5 (積分の定義III: $\mathbb{C}$-値関数)

(1) $f: X\to\mathbb{C}$ $\mathcal{M}$-可測 に対し

▷ f: μ-可積分 $\overset{def}{\iff} \int_X|f|\,d\mu<\infty$

$\iff$ $Re(f), Im(f)$ が ($\mathbb{R}$-値関数として) μ-可積分

($\max\{|Re(f)|,|Im(f)|\}\leqq|f|\leqq|Re(f)|+|Im(f)|$ と Thm 1.18-(2),(3))

▷ f: μ-可積分のとき $\boxed{\int_X f\,d\mu:=\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu}$

(2) $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{M},\mu,\mathbb{C}):=\mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C}):=\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$

$:=\{f: X\to\mathbb{C}\mid f$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分$\}$.

(注 f が $\mathbb{R}$-値 (つまり $Im(f)=0$) のときは, Def8.5-(1) は Def1.22-(1) と一致)

Prop 8.6 (積分の性質III: $\mathbb{C}$-値関数)

(1) $f\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ ならば $\left|\int_X f\,d\mu\right|\leqq\int_X|f|\,d\mu$.

(2) (線型性) $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ とするとき,

$\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ かつ

$$\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu.$$

∵ (2) まず, 系8.3より $\alpha f+\beta g$ は $\mathcal{M}$-可測であり, また $|\alpha f+\beta g|\leqq|\alpha|\cdot|f|+|\beta|\cdot|g|$ なので Thm 1.18-(2),(3)より

$\int_X|\alpha f+\beta g|\,d\mu\leqq\int_X(|\alpha|\cdot|f|+|\beta|\cdot|g|)\,d\mu$

$=|\alpha|\int_X|f|\,d\mu+|\beta|\int_X|g|\,d\mu<\infty$.

$\therefore\ \alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$.

claim1 $\int_X(f+g)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$.

∵ $\int_X(f+g)\,d\mu \overset{\text{Def8.5-(1)}}{=} \int_X Re(f+g)\,d\mu+i\int_X Im(f+g)\,d\mu$

$=\int_X(Re(f)+Re(g))\,d\mu+i\int_X(Im(f)+Im(g))\,d\mu$

$\overset{\text{Thm1.24-(2)}}{=}\int_X Re(f)\,d\mu+\int_X Re(g)\,d\mu+i\left(\int_X Im(f)\,d\mu+\int_X Im(g)\,d\mu\right)$

$=\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu+\int_X Re(g)\,d\mu+i\int_X Im(g)\,d\mu$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$. // (claim1)

claim2 $a\in\mathbb{R}$ に対し $\int_X af\,d\mu=a\int_X f\,d\mu$.

∵ $\int_X af\,d\mu=\int_X(aRe(f)+iaIm(f))\,d\mu$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}\int_X aRe(f)\,d\mu+i\int_X aIm(f)\,d\mu$

$\overset{\text{Thm1.24-(2)}}{=}a\int_X Re(f)\,d\mu+i\cdot a\int_X Im(f)\,d\mu$

$=a\left(\int_X Re(f)\,d\mu+i\int_X Im(f)\,d\mu\right)$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=}a\int_X f\,d\mu$. // (claim2) claim3 $\int_X if\,d\mu = i\int_X f\,d\mu$.

∵ $\int_X if\,d\mu = \int_X(-\mathrm{Im}(f)+i\mathrm{Re}(f))\,d\mu$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=} \int_X(-\mathrm{Im}(f))\,d\mu + i\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu$

$\overset{\text{Thm1.24-(2)}}{=} -\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu$

$= i\left(\int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu\right)$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=} i\int_X f\,d\mu$. // (claim3)

claim4 $\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$.

∵ $\alpha = a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ と書いておくと,

$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X(af+b\cdot if)\,d\mu$

$\overset{\text{claim1}}{=} \int_X af\,d\mu + \int_X b\cdot if\,d\mu$

$\overset{\text{claim2}}{=} a\int_X f\,d\mu + b\int_X if\,d\mu$

$\overset{\text{claim3}}{=} a\int_X f\,d\mu + b\cdot i\int_X f\,d\mu$

$= (a+bi)\int_X f\,d\mu = \alpha\int_X f\,d\mu$. // (claim4)

(2)の主張は claim1 と claim4 から従う.

(1) $\int_X f\,d\mu = 0$ のときは $\alpha := 1$ とおき,
$\int_X f\,d\mu \neq 0$ のときは $\alpha := \left|\int_X f\,d\mu\right|\cdot\left(\int_X f\,d\mu\right)^{-1}$
とおくと, $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha\int_X f\,d\mu$.
よって(2)を用いると

$\mathbb{R}\ni\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha\int_X f\,d\mu \underset{(2)}{=} \int_X \alpha f\,d\mu$

$\overset{\text{Def8.5-(1)}}{=} \int_X \mathrm{Re}(\alpha f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(\alpha f)\,d\mu$.

この各辺の実部を取ると, $\mathrm{Re}(\alpha f)\leqq|\alpha f| = |\alpha|\cdot|f| = |f|$
なので $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \int_X \mathrm{Re}(\alpha f)\,d\mu$

$\overset{\text{Thm1.24-(1)}}{\leqq} \int_X |f|\,d\mu$. ■

Thm 8.7 (像測度定理($\mathbb{C}$-値関数)) $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とする.
$d\in\mathbb{N}$ とし, X を d-dim. r.v. とする. また $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測とする. このとき

- $f(X) := f\circ X : \Omega\to\mathbb{C}$ は $\mathcal{F}$-可測.
- $f(X)$ が $\mathbb{P}$-可積分 $\Longleftrightarrow$ f が $\mathbb{P}_X$-可積分.
- 「可積分」のとき $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$.

∵ $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ は Prop 8.2 により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測であり,
従って Prop 2.4 により $\mathrm{Re}(f(X)) = (\mathrm{Re}(f))\circ X$ および
$\mathrm{Im}(f(X)) = (\mathrm{Im}(f))\circ X$ は real r.v.'s, すなわち
Ω 上の $\mathcal{F}$-可測な $\mathbb{R}$-値関数である. よって再び
Prop 8.2 により $f(X)$ は $\mathcal{F}$-可測.
さて, Lemma 8.4 より $|f|:\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測
なので, Thm 2.10(2) により

$$\mathbb{E}[|f(X)|] = \mathbb{E}[|f|(X)] = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathbb{P}_X(dx),$$

特に $f(X)$ が $\mathbb{P}$-可積分 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}[|f(X)|]<\infty$ $\Longleftrightarrow$
f が $\mathbb{P}_X$-可積分 $\Longleftrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathbb{P}_X(dx)<\infty$

さらに $f(X)$ が $\mathbb{P}$-可積分のとき, その実部 $(\mathrm{Re}(f))\circ X$ と
虚部 $(\mathrm{Im}(f))\circ X$ は $\mathbb{P}$-可積分なので再び Thm 2.10-(2) より

$\mathbb{E}[\mathrm{Re}(f(X))] = \mathbb{E}[(\mathrm{Re}(f))\circ X] = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Re}(f)(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$,

$\mathbb{E}[\mathrm{Im}(f(X))] = \mathbb{E}[(\mathrm{Im}(f))\circ X] = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}(f)(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$.

$\mathbb{E}[f(X)]$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$ はこれらの値をそれぞれ
実部と虚部に持つので, $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$. ■

8.1 特性関数とその性質

● $\theta\in\mathbb{R}$ に対し $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,
従って $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|e^{i\theta}|=1$, $\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$.

以下, 簡単のため実確率変数の場合のみ考える.
(同様の事実はすべて d 次元確率変数に対し証明できる)

Def 8.8 (特性関数)

(1) $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し, その特性関数 $\varphi_\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)$$

で定める. ここで $\mathbb{R}\ni x\longmapsto e^{itx} = \cos(tx)+i\sin(tx)$
の実部, 虚部は $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数であり,
従って積分 $\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)$ が定まることに注意されたい.

(2) Real r.v. X に対しその特性関数 $\varphi_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] \underset{\text{Thm8.7}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mathbb{P}_X(dx)$$

で定める. つまり φ_X とは X の分布 $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}(X)$ の
特性関数 $\varphi_{\mathcal{L}(X)}$ に他ならない.

Prop 8.9 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し, その特性関数 φ_μ は次を満たす:

(φ1) $\varphi_\mu(0)=1$. (φ2) ${}^\forall t\in\mathbb{R}$, $|\varphi_\mu(t)|\leqq 1$, $\varphi_\mu(-t) = \overline{\varphi_\mu(t)}$.

(φ3) φ_μ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続である.

∵ (φ1) $\varphi_\mu(0) = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mu(dx) = \mu(\mathbb{R}) = 1$.

(φ2) $t \in \mathbb{R}$ とする. Prop 8.6-(1) より

$$|\varphi_\mu(t)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu(dx)\right| \leqq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}|\,\mu(dx) = \mu(\mathbb{R}) = 1$$

また, $e^{i(-t)x} = e^{-itx} = \cos(tx) - i\sin(tx)$ なので

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(-t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i(-t)x}\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\mu(dx) + i\int_{\mathbb{R}}(-\sin(tx))\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\mu(dx) - i\int_{\mathbb{R}}\sin(tx)\mu(dx)\\ &= \overline{\varphi_\mu(t)}.\end{aligned}$$

(φ3) まず φ_μ が 0 において連続であることを示そう. そのためには, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ を満たす $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ を任意に取り, $\lim_{n\to\infty}\varphi_\mu(h_n) = \varphi_\mu(0)$ となることを示せばよい. 実際 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $|e^{ih_n x}| \leqq 1$ であり $\int_{\mathbb{R}} 1\,\mu(dx) = 1 < \infty$, かつ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} e^{ih_n x} = e^0 = 1$ であるので

$$\varphi_\mu(h_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{ih_n x}\mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{DCT} \int_{\mathbb{R}} 1\,\mu(dx) = \varphi_\mu(0).$$

よって φ_μ は 0 において連続である.

さて, $\varepsilon \in (0,\infty)$ とする. φ_μ の 0 における連続性と $\varphi_\mu(0) = 1$ より, $\exists\delta\in(0,\infty)$, $\forall h \in (-\delta,\delta)$,

$$|1 - \varphi_\mu(h)| < \frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad \text{------} \quad (8.1)$$

そこで $|s-t| < \delta$ を満たす $s, t \in \mathbb{R}$ を任意に取り $h := s - t$ とおくと, $|e^{ihx} - 1|^2 = 2 - 2\mathrm{Re}(e^{ihx})$ なので

$$\begin{aligned}|\varphi_\mu(s) - \varphi_\mu(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}}(e^{ix(t+h)} - e^{ixt})\mu(dx)\right|\\ &\overset{\text{Prop 8.6-(1)}}{\leqq} \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt}|\cdot|e^{ixh} - 1|\,\mu(dx)\\ &\overset{\text{Prop 2.7-(2)}}{\leqq} \left(\int_{\mathbb{R}}|e^{ixt}|^2\mu(dx)\int_{\mathbb{R}}|e^{ixh}-1|^2\mu(dx)\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}}(2 - 2\mathrm{Re}(e^{ihx}))\mu(dx)\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{2 - 2\mathrm{Re}(\varphi_\mu(h))}\\ &= \sqrt{\mathrm{Re}(2 - 2\varphi_\mu(h))}\\ &\leqq |2 - 2\varphi_\mu(h)|^{1/2} \underset{(8.1)}{<} \varepsilon.\end{aligned}$$

よって φ_μ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続である. ■

Thm 8.10 X を real r.v. とし, $n\in\mathbb{N}$ とする. このとき, $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ ならば, X の特性関数 φ_X は C^n-級 (つまり n 階導関数が存在して $\mathbb{R}$ 上連続) であり, さらに $\forall k \in \{1,\cdots,n\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}]$

特に $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k\varphi_X^{(k)}(0)$.

∵ $k \in \{0,1,\cdots,n\}$ とする. $|X|^k \leqq 1 + |X|^n 1_{\{|X|\geqq 1\}}$ より

$$\mathbb{E}[|X|^k] \leqq \mathbb{E}[1 + |X|^n] = 1 + \mathbb{E}[|X|^n] < \infty$$

(ただし $k=0$ のときは $X^k := 1 =: |X|^k$ と定める)

であることに注意すると, $f_k : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $f_k(t) := i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}]$ により定義できる. ($f_0 = \varphi_X$)

claim1 f_k は連続.

∵ $t \in \mathbb{R}$ とし, $\lim_{l\to\infty} t_l = t$ を満たす $\{t_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ を任意にとる. このとき $\lim_{l\to\infty} X^k e^{it_l X} = X^k e^{itX}$ であり, また $\forall l\in\mathbb{N}$, $|X^k e^{it_l X}| = |X|^k$ かつ $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ なので,

$$f_k(t_l) = i^k\mathbb{E}[X^k e^{it_l X}] \xrightarrow[DCT]{l\to\infty} i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}] = f_k(t).$$

これは f_k が t において連続であることを意味する. //(claim1)

claim2 $k < n$ ならば $f_k' = f_{k+1}$.

∵ $t\in\mathbb{R}$ とし, $\lim_{l\to\infty} h_l = 0$ を満たす $\{h_l\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を任意に取る. このとき, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x| \leqq |x|$ に注意すると, $\forall l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}|X^k e^{itX}\cdot h_l^{-1}(e^{ih_l X} - 1)| &= |X|^k|h_l|^{-1}|e^{ih_l X} - 1|\\ &= |X|^k|h_l|^{-1}\sqrt{2 - 2\cos(h_l X)}\\ &= |X|^k|h_l|^{-1}\left|2\sin\frac{h_l X}{2}\right|\\ &\leqq |X|^{k+1},\end{aligned}$$

かつ $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] < \infty$ であり, さらに

$\lim_{l\to\infty} X^k e^{itX} h_l^{-1}(e^{ih_l X} - 1) = iX^{k+1}e^{itX}$ なので,

$$\begin{aligned}&h_l^{-1}(f_k(t+h_l) - f_k(t))\\ &= i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}\cdot h_l^{-1}(e^{ih_l X} - 1)]\\ &\xrightarrow[DCT]{l\to\infty} i^k\mathbb{E}[iX^{k+1}e^{itX}] = i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1}e^{itX}] = f_{k+1}(t).\end{aligned}$$

$\{h_l\}_{l=1}^\infty$ の任意性よりこれは

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(f_k(t+h) - f_k(t)) = f_{k+1}(t),$$

すなわち $f_k'(t) = f_{k+1}(t)$ を意味する. //(claim2)

Thm 8.10 は claim2, claim1 から明らか. ■

Thm 8.11 X を real r.v. とし, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, もし $\exists a\in(0,\infty)$, X の特性関数 φ_X が $(-a,a)$ 上で $(2n-1)$ 階導関数 $\varphi_X^{(2n-1)}$ を持ち, さらに $\varphi_X^{(2n)}(0)$ が存在すれば $\mathbb{E}[X^{2n}] < \infty$.

Lemma 8.12 $a\in(0,\infty)$ とし, $f : (-a,a) \to \mathbb{C}$ は微分可能とする. このとき, もし $f''(0)$ が存在するならば

$\boxed{o(h^2)}$ この部分を $g(h)$ と書くとき $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}=0$ であることを表す記号

$h\to 0$ のとき $f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2)$ であり，さらに $f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}$.

☺ $F:(-a,a)\to\mathbb{C}$ を
$F(x):=f(x)-f(0)-f'(0)x-\frac{1}{2}f''(0)x^2$
で定める. このとき $\forall x\in(-a,a)$, $F'(x)=f'(x)-f'(0)-f''(0)x$ であり，するとさらに $F''(0)=f''(0)-f''(0)=0$.
$F'(0)=0$ でありかつ $F''(0)=0$ であるので, $F''(0)$ の定義により, $\varepsilon\in(0,\infty)$ を任意に取るとき $\exists\delta\in(0,a)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{F'(h)-F'(0)}{h}-F''(0)\right|=\left|\frac{F'(h)}{h}\right|<\varepsilon$$

となるが，さらにそのような h に対し，平均値の定理により $\exists\theta_h\in(0,1)$, $F(h)=F(h)-0=F(h)-F(0)$
$=hF'(\theta_h h)$,
従って

$$\frac{1}{h^2}\left|f(h)-f(0)-f'(0)h-\frac{1}{2}f''(0)h^2\right| =\frac{|F(h)|}{h^2}=\frac{|h\cdot F'(\theta_h h)|}{h^2}=\frac{|F'(\theta_h h)|}{|h|} <\frac{\varepsilon|\theta_h h|}{|h|}<\varepsilon$$

となり第1の主張を得る. これにより
$f(h)+f(-h)-2f(0)=f''(0)h^2+o(h^2)$ ($h\to 0$ のとき)
となるのでさらに $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=f''(0)$
も従う. ■

Thm8.11の証明

$k\in\{0,\dots,n\}$ に対し $\mathbb{E}[X^{2k}]<\infty$ であることを数学的帰納法により証明する. $k=0$ のとき $X^{2k}=1$ なので $\mathbb{E}[X^{2k}]=1<\infty$. 次に $k\in\{0,\dots,n-1\}$ とし $\mathbb{E}[X^{2k}]<\infty$ と仮定する. このとき Thm8.10より
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X^{(2k)}(t)=(-1)^k\mathbb{E}[X^{2k}e^{itX}]$
であるので, Lemma8.12の2つ目の主張により

$$|\varphi_X^{(2k+2)}(0)|=\lim_{l\to\infty}\left|\frac{\varphi_X^{(2k)}(1/l)+\varphi_X^{(2k)}(-1/l)-2\varphi_X^{(2k)}(0)}{1/l^2}\right| =\lim_{l\to\infty}\mathbb{E}\left[X^{2k}\left(\frac{\sin\frac{X}{2l}}{\frac{1}{2l}}\right)^2\right]\underset{\text{Fatou}}{\geq}\mathbb{E}[X^{2k+2}].$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(xh)}{h}=x$

$\therefore\ \mathbb{E}[X^{2k+2}]<\infty$.
よって帰納法により $\mathbb{E}[X^{2n}]<\infty$. (Fatou=Prop1.21) ■

Prop8.13 $n\in\mathbb{N}$ とし, $\{X_k\}_{k=1}^n$ は独立な real r.v.'s とする. このとき $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$.
特に, $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\{X_k\}_{k=1}^n$ は i.i.d. で $X_1\sim\mu$ ならば,
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\varphi_\mu(t)^n$.

☺ まず, Thm4.12-(2) は f が $\mathbb{C}$-値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$-可測関数である場合にも成り立つことを注意しておく (f の実部と虚部それぞれにThm4.12-(2)を用いればよい).
$t\in\mathbb{R}$ とし, $\varphi_{X_1+\cdots+X_k}(t)=\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_k}(t)$ を $k\in\{1,\dots,n\}$ についての数学的帰納法により示そう. $k=1$ のときは自明.
$k\in\{1,\dots,n\}$, $k<n$ とし, この k に対し上の等式が成り立つと仮定する. $X:=X_1+\cdots+X_k$, $Y:=X_{k+1}$ とおくと, Prop4.13-(1),(3),(2)を順に用いることにより, $\{X,Y\}$ の独立性が分かる. 従って Thm4.12-(2) により

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+\cdots+X_{k+1}}(t)&=\varphi_{X+Y}(t)=\mathbb{E}[e^{it(X+Y)}]\\&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{it(x+y)}\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)\\&\overset{\text{Prop8.6-(2)}}{=}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}\int_{\mathbb{R}}e^{ity}\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)\\&=\int_{\mathbb{R}}e^{ity}\mathbb{P}_Y(dy)\cdot\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\mathbb{P}_X(dx)\\&=\varphi_Y(t)\varphi_X(t)\overset{\text{帰納法の仮定}}{=}\varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_{k+1}}(t).\end{aligned}$$

よって帰納法が完成し,
1つ目の主張が示せた. 2つ目の主張は $\forall k\in\{1,\dots,n\}$, $\varphi_{X_k}=\varphi_{\mathcal{L}(X_k)}=\varphi_\mu$ であることと前半より従う. ■

例8.14 $m\in\mathbb{R}$, $v\in[0,\infty)$ とし, X は real r.v. で $X\sim N(m,v)$ とする.
このとき $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_X(t)=\exp(itm-\frac{1}{2}t^2v)$.

☺ $v=0$ なら $\mathbb{P}[X=m]=1$ より $\varphi_X(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]=e^{itm}$.
そこで $v>0$ とする. Thm2.11-(2)を実部と虚部それぞれに用いて

$$\varphi_X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\mathbb{P}_X(dx)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right)dx \overset{x=m+\sqrt{v}y}{=}\int_{\mathbb{R}}e^{itm}\cdot e^{it\sqrt{v}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=e^{itm}\varphi_{N(0,1)}(t\sqrt{v})$$

そこで $m=0, v=1$ と仮定して示せばよい. このとき, 例3.7より $\mathbb{E}[X^2]<\infty$ なので Thm8.10により

$$\begin{aligned}\varphi_X'(t)&=i\mathbb{E}[Xe^{itX}]\overset{\text{Thm8.7}}{=}i\int_{\mathbb{R}}xe^{itx}\mathbb{P}_X(dx)\\&\overset{\text{Thm2.11-(2)}}{=}i\int_{\mathbb{R}}xe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\\&\overset{\text{DCT}}{=}i\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}xe^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\\&=i\lim_{n\to\infty}\left(\left[-e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-n}^{n}+\int_{-n}^{n}ite^{itx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\right)\\&=i\int_{\mathbb{R}}ite^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=-t\varphi_X(t).\end{aligned}$$

従って $(e^{t^2/2}\varphi_X(t))'=e^{t^2/2}(t\varphi_X(t)+\varphi_X'(t))=0$ となるので, $e^{t^2/2}\varphi_X(t)$ は定数 $e^{0^2/2}\varphi_X(0)=1$ に等しく, よって $\varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$. ■

Date

Thm 8.15 (Lévyの反転公式)

$\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ とし, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とする. このとき

$$\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\times\varphi_\mu(t)dt.$$

☺ まず, 次の不等式が成り立つことに注意; $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right|=|e^{-itb}|\cdot\left|\frac{e^{it(b-a)}-1}{it}\right|\cdot|e^{itx}|=\frac{\sqrt{2-2\cos(t(b-a))}}{|t|}=\frac{2\left|\sin\frac{t(b-a)}{2}\right|}{|t|}\leqq|b-a|. \quad (8.2)$$

さて, $A\in(0,\infty)$ とする. (8.2) より

$$\int_{-A}^{A}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right|\mu(dx)\right)dt\leqq 2A\cdot|b-a|<\infty$$

であるので Fubiniの定理 (Thm 4.8-(2)) が (実部と虚部それぞれに) 使えて,

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_\mu(t)dt=\int_{-A}^{A}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\mu(dx)\right)dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-A}^{A}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt\right)\mu(dx)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\cos(t(x-a))-\cos(t(x-b))}{it}}_{t\text{の奇関数}}dt+\int_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{t}}_{t\text{の偶関数}}dt\right)\mu(dx)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(2\int_0^A\frac{\sin(t(x-a))}{t}dt-2\int_0^A\frac{\sin(t(x-b))}{t}dt\right)\mu(dx)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))\mu(dx) \quad (8.3)$$

(ただし $x\in\mathbb{R}$ に対し $F(A,x):=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt$).

ここで次に述べる Lemma 8.16 により, (8.3) の被積分関数は,

- $\forall A\in(0,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|2F(A,x-a)-2F(A,x-b)|\leqq4\|F\|_\infty<\infty$,
- $\displaystyle\lim_{A\to\infty}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,a)\cup(b,\infty),\\ \pi & x\in\{a,b\},\\ 2\pi & x\in(a,b),\end{cases}$

を満たす. 従って, $\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$ であるような $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,\infty)$ を任意に取ると Lebesgueの収束定理 (Thm 1.25, DCT) により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(2F(A_n,x-a)-2F(A_n,x-b))\mu(dx)=\int_{\mathbb{R}}(2\pi\mathbb{1}_{(a,b)}(x)+\pi\mathbb{1}_{\{a,b\}}(x))\mu(dx)=2\pi\left(\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})\right)$$

となり, これは (8.3) に至るまでの計算と合わせると

$$\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_\mu(t)dt=\int_{\mathbb{R}}(2F(A,x-a)-2F(A,x-b))\mu(dx)\xrightarrow[A\to\infty]{}2\pi\left(\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})\right)$$

の極限が成り立つことを意味する. これで主張が示せた. ■

Lemma 8.16

$A\in(0,\infty)$, $x\in\mathbb{R}$ に対し $F(A,x):=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt$ とおく. このとき $\|F\|_\infty:=\sup_{(A,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}}|F(A,x)|<\infty$ であり, さらに

$$\lim_{A\to\infty}F(A,x)=\begin{cases}\pi/2 & x\in(0,\infty),\\ 0 & x=0,\\ -\pi/2 & x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

☺ $A\in(0,\infty)$ に対し $F_1(A):=F(A,1)$ とおく. $\sin0=0$ より $F(A,0)=0\xrightarrow[A\to\infty]{}0$ なので $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ の場合のみ考えればよいが,

- $x\in(0,\infty)$ に対し $F(A,x)=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt\underset{t=u/x}{=}\int_0^{Ax}\frac{\sin u}{u/x}\frac{1}{x}du=F_1(Ax)$,
- $x\in(-\infty,0)$ に対し

$$F(A,x)=\int_0^A\frac{\sin(tx)}{t}dt=-\int_0^A\frac{\sin(t|x|)}{t}dt=-F(A,|x|)=-F_1(A|x|)$$

であるので, 結局 $\sup_{A\in(0,\infty)}|F_1(A)|<\infty$ と $\lim_{A\to\infty}F_1(A)=\frac{\pi}{2}$ を示せばよい.

$A\in(0,\infty)$ とする. $x\in(0,\infty)$ に対し $\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-xt}dt$ であり, また

$$\int_0^A\left(\int_0^\infty|e^{-xt}\sin x|dt\right)dx=\int_0^A\frac{|\sin x|}{x}dx\leqq\int_0^A1dx=A<\infty$$

であることに注意すると, Fubiniの定理 (Thm 4.8-(2)) により

$$F_1(A)=\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^A\left(\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dt\right)dx\underset{\text{Fubini}}{=}\int_0^\infty\left(\int_0^Ae^{-xt}\sin x\,dx\right)dt. \quad (8.4)$$

さらに (8.4) の内側の積分を部分積分法を用いて計算すると

$$\int_0^Ae^{-xt}\sin x\,dx=\left[-e^{-xt}\cos x\right]_0^A-t\int_0^Ae^{-xt}\cos x\,dx$$

$$=1-e^{-At}\cos A-t\left(\left[e^{-xt}\sin x\right]_0^A+t\int_0^Ae^{-xt}\sin x\,dx\right)$$

$$=1-e^{-At}(\cos A+t\sin A)-t^2\int_0^Ae^{-xt}\sin x\,dx,$$

従って

$$\int_0^Ae^{-xt}\sin x\,dx=\frac{1}{1+t^2}-e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2} \quad (8.5)$$

さらに $\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt\underset{\text{MCT}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{1}{1+t^2}dt=\lim_{n\to\infty}[\mathrm{Arctan}\,t]_0^n=\frac{\pi}{2}$,

また $\int_0^\infty\left|e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}\right|dt\leqq\int_0^\infty e^{-At}\frac{1+t}{1+t^2}dt\leqq\int_0^\infty2e^{-At}dt=\frac{2}{A}(<\infty)$

より $\left|\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt\right|\leqq\int_0^\infty\left|e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}\right|dt\leqq\frac{2}{A}$ (8.6)

であるので, (8.4), (8.5), (8.6) から

$$F_1(A)=\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty e^{-At}\frac{\cos A+t\sin A}{1+t^2}dt\xrightarrow[A\to\infty]{}\frac{\pi}{2}$$

かつ $A\geqq1$ のとき $\frac{\pi}{2}-2\leqq F_1(A)\leqq\frac{\pi}{2}+2$ が分かる. また $0<A\leqq1$ のときは $|F_1(A)|\leqq\int_0^A\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqq\int_0^A1dx=A\leqq1$ であるので, 合わせて $\sup_{A\in(0,\infty)}|F_1(A)|\leqq\frac{\pi}{2}+2<\infty$. ■

Thm 8.15より次の重要な定理を得る.

Thm 8.17 (特性関数の一意性定理)

$\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ が $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_\mu(t)=\varphi_\nu(t)$ を満たすならば, $\mu=\nu$.

Lemma 8.19の証明 $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ より, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\ge N$, $|z_n - z|\le 1$, 従って $|z_n|\le|z_n-z|+|z|\le|z|+1$.
さて, $n\in\mathbb{N}$ は $n\ge N$ を満たすとする. このとき

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k(n-k)!}\frac{z_n^k}{k!}. \quad \cdots\cdots(8.9)$$

$f_n: \mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{C}$ を $k\le n$ のとき $f_n(k) := \frac{n!}{n^k(n-k)!}\frac{z_n^k}{k!}$, $k>n$ のとき $f_n(k):=0$ と定めると

$$|f_n(k)|\le |z_n|^k/k! \le (|z|+1)^k/k!, \quad \cdots\cdots(8.10)$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = z^k/k!$ であり, $\#$ を $\forall k\in\mathbb{N}$, $\#(\{k\})=1$ なる $\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上の測度として, Prop 2.14-(2)を用いると

$$(1+z_n/n)^n \overset{(8.9)}{=} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} f_n(k)\,d\#(k) \xrightarrow[n\to\infty]{(8.10),\,\mathrm{DCT}} \int_{\mathbb{N}\cup\{0\}} (z^k/k!)\,d\#(k) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z. \ ■$$

∵) $C_\mu := \{a\in\mathbb{R} \mid \mu(\{a\})=0\}$, $C_\nu := \{a\in\mathbb{R}\mid \nu(\{a\})=0\}$ とおく.
Thm 7.11 (5)⇒(6)の証明の冒頭で示したように, $\mathbb{R}\setminus C_\mu$, $\mathbb{R}\setminus C_\nu$ は可算集合であり, すると $\mathbb{R}\setminus(C_\mu\cap C_\nu) = (\mathbb{R}\setminus C_\mu)\cup(\mathbb{R}\setminus C_\nu)$ も可算集合であるので, 特に $C_\mu\cap C_\nu$ は $\mathbb{R}$ において稠密, つまり

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ a<b \Rightarrow (a,b)\cap C_\mu\cap C_\nu \ne \emptyset \quad \cdots\cdots(8.7)$$

である(実際, (a,b) は非可算なので $(a,b)\not\subset \mathbb{R}\setminus(C_\mu\cap C_\nu)$).

さて, $a,b\in\mathbb{R}$ で $a<b$ を満たすものを任意に取る. (8.7)により, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n, b_n\in C_\mu\cap C_\nu$ を

$$a_n\in\left(a-\frac1n,\ a-\frac{1}{n+1}\right),\qquad b_n\in\left(b+\frac{1}{n+1},\ b+\frac1n\right)$$

となるように取ることができ, するとこのとき $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

- $a_n<a_{n+1}<a<b<b_{n+1}<b_n$, 従って $[a,b]\subset(a_{n+1},b_{n+1})\subset(a_n,b_n)$. ……(8.8)
- $a_n,b_n\in C_\mu\cap C_\nu$ より $\mu(\{a_n,b_n\})=\nu(\{a_n,b_n\})=0$, これと $\varphi_\mu=\varphi_\nu$, Thm 8.15より $\mu((a_n,b_n))=\nu((a_n,b_n))$.

また明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であるので, (8.8)と合わせて $[a,b]=\bigcap_{n=1}^\infty (a_n,b_n)$ であることが分かり, よって

$$\mu([a,b]) \overset{\text{Prop1.6-(4)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu((a_n,b_n)) = \lim_{n\to\infty} \nu((a_n,b_n)) \overset{\text{Prop1.6-(4)}}{=} \nu([a,b]).$$

これは乗法族 $\mathcal{J}_1 = \{[a,b]\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}\cup\{\emptyset\}$ に対し $\mu|_{\mathcal{J}_1}=\nu|_{\mathcal{J}_1}$ であることを意味し, さらに Prop1.9により $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{J}_1)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, また $\mu(\mathbb{R})=1=\nu(\mathbb{R})<\infty$ であるので, Thm 4.6により $\mu=\nu$ が従う. ■

Thm 8.17 を Thm 7.12, Prop 7.8と合わせて, 次の命題を得る.

Prop 8.18 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$ とする.
(1) $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ ならば, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mu_n}(t)=\varphi_\mu(t)$.
(2) $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は $\forall t\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t)=\varphi(t)$ を満たすとし, さらに $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ は緊密(Thm 7.12-(1))と仮定する. このとき $\exists_1\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\varphi_\mu=\varphi$. さらにこの μ に対し $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.

∵) (1) $t\in\mathbb{R}$ を任意に取ると, $\cos(t(\cdot)), \sin(t(\cdot))\in C_b(\mathbb{R})$ より

$$\varphi_{\mu_n}(t)=\int_\mathbb{R}\cos(tx)\mu_n(dx)+i\int_\mathbb{R}\sin(tx)\mu_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Def 7.2}} \int_\mathbb{R}\cos(tx)\mu(dx)+i\int_\mathbb{R}\sin(tx)\mu(dx)=\varphi_\mu(t).$$

(2) Thm 7.12より $\exists\{n_0(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $\exists\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_{n_0(k)}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$ であり, すると(1)より $\forall t\in\mathbb{R}$ に対し
$\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{\mu_{n_0(k)}}(t) \overset{(1)}{=} \varphi_\mu(t)$. さらに任意の狭義単調増加列 $\{n(k)\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ に対し, 再度 Thm 7.12より
$\exists\{k(l)\}_{l=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ 狭義単調増加, $\exists\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu_{n(k(l))}\xrightarrow{\mathcal{L}}\nu$ となるが, このとき再び(1)により $\forall t\in\mathbb{R}$ に対し

$$\varphi_\mu(t)=\varphi(t)=\lim_{l\to\infty}\varphi_{\mu_{n(k(l))}}(t)\overset{(1)}{=}\varphi_\nu(t)$$

となるので Thm 8.17により $\mu=\nu$, 従って $\mu_{n(k(l))}\xrightarrow{\mathcal{L}}\nu=\mu$.
これは Prop 7.8の条件の成立を意味し, よって Prop 7.8より $\mu_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$.
$\varphi_\mu=\varphi$ となる $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の一意性は Thm 8.17より従う. ■

8.2 中心極限定理(Thm 7.4)の証明

最後に Prop 8.18-(2)を用いて中心極限定理(Thm 7.4)を証明する.

Lemma 8.19 $z\in\mathbb{C}$ と $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ が $\lim_{n\to\infty} z_n=z$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n=e^z. \quad \text{(証明はページ上を参照.)}$$

Lemma 8.20 $\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ は i.i.d. とし, $m:=E[X_1]$, $v:=\mathrm{var}(X_1)$, また各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ とおく.
このとき $\forall t\in\mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left(it\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)\right]=\exp\left(-\frac{t^2 v}{2}\right).$$

∵) $f:=\varphi_{X_1-m}$ とおく. Thm 8.10により, f', f'' が存在して $\mathbb{R}$ 上連続であり, また $f(0)=1$, $f'(0)=iE[X_1-m]=0$, $f''(0)=i^2E[(X_1-m)^2]=-v$. $t=0$ のときは主張は明らかなので, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とする. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は i.i.d. なので Prop 8.13により $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$$E\left[\exp\left(it\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)\right] = \left(e^{-i(t/\sqrt n)m}\right)^n\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt n}\right)$$
$$=\left(e^{-i(t/\sqrt n)m}\right)^n\varphi_{X_1}(t/\sqrt n)^n = \left(e^{-i(t/\sqrt n)m}E[e^{i(t/\sqrt n)X_1}]\right)^n$$
$$=E[e^{i(t/\sqrt n)(X_1-m)}]^n = f(t/\sqrt n)^n.$$

ところが Lemma 8.12の1つ目の主張により, $n\to\infty$ のとき

$$f(t/\sqrt n)=f(0)+f'(0)\frac{t}{\sqrt n}+\frac12 f''(0)\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$
$$=1+\frac1n\Big(-\frac12 vt^2+t^2\cdot \underbrace{o(t^2/n)/(t^2/n)}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}\Big)$$

であるので, Lemma 8.19より

$$E\left[\exp\left(it\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)\right]=f(t/\sqrt n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Lemma 8.19}} \exp\left(-\frac12 t^2 v\right). \ ■$$

Thm 7.4の証明 (1) Lemma 8.20と例 8.14より $\forall t\in\mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{L}\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)$ の特性関数 $E\left[\exp\left(it\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)\right]$ は $n\to\infty$ のとき $N(0,v)$ の特性関数 $\exp\left(-\frac{t^2v}{2}\right)=\varphi_{N(0,v)}(t)$ に収束する. また, $n,N\in\mathbb{N}$ を任意に取るとき Thm 5.3-(4)の証明中の議論から

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\in\mathbb{R}\setminus[-N,N]\right]=\mathbb{P}\left[|S_n-nm|>N\sqrt n\right]$$
$$\le\frac{1}{N^2n}E[|S_n-nm|^2]=\frac{1}{N^2n}\mathrm{var}(S_n)\overset{\text{Prop4.14-(2)}}{=}\frac{nv}{N^2n}=\frac{v}{N^2}$$

となるので, "$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}$ ---" を取ることで $\left\{\mathcal{L}\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt n}\right)\right\}_{n=1}^\infty$ は緊密であることが分かる. よって Prop 8.18-(2)が適用でき, 主張が従う.
(2) $\partial(-\infty,x]=\partial(-\infty,x)=\{x\}$ なので, (1)と Thm 7.11より主張を得る. ■