porous medium 方程式の解に対する Hölder 評価とその応用

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D4)

1. porous medium 方程式の解に対する Hölder 評価

次の外力項を持つ porous medium 方程式を考える:

$$
\text{(PME)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f + g, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

ここで, $\alpha > 1$ は定数, 外力項 $f = f = (f_1(t,x), \dots, f_n(t,x))$, $g = g(t,x)$ と初期値 $u_0 = u_0(x)$ はそれぞれ $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 上の与えられた関数とする. この方程式に対する弱解を次で導入する.

定義 1.1. 非負な初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ に対し, u が (PME) の弱解であるとは, $T > 0$ が存在して, 次をみたすときをいう:

i) 殆んどすべての $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$ に対し, $u(t,x) \geq 0$,
ii) $u \in L^\infty(0,T\,; L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^\alpha \in L^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$,
iii) 任意の $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ と, 殆んどすべての $0 < t < T$ に対して

$$
\int_{\mathbb{R}^n} u(t)\varphi(t)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0\varphi(0)\,dx = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ u(\tau)\partial_t\varphi(\tau) - \nabla u^\alpha(\tau)\cdot\nabla\varphi(\tau) - f\cdot\nabla\varphi + g\varphi \right\} dx.
$$

本節では, (PME) の弱解 u の Hölder 連続性と外力との関係について考察する. なお, $f, g \equiv 0$ のとき, $(f)_+ = \max\{f, 0\}$, $\sigma = n(\alpha - 1) + 2$, 定数 $A > 0$ に対して Barenblatt 解

$$
U(t,x) = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}} \left(A - \frac{\alpha-1}{2\alpha} \frac{|x|^2}{(1+\sigma t)^{\frac{2}{\sigma}}} \right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}} = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}} V\left(\frac{|x|}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)
$$

が存在するため, 解は一般に滑らかにならないことに注意する.

$f, g \equiv 0$ に対する弱解の Hölder 連続性はよく知られている (Caffarelli-Friedman [2], DiBenedetto-Friedman [3], Caffarelli-Vázquez-Wolanski [1]). 一般の f, g に対する弱解の Hölder 連続性は DiBenedetto-Friedman [3] によって十分条件が指摘されているが, 証明は与えられていない. 本節では, 弱解が Hölder 連続となるための f, g に対する条件を彼らの与えた条件より拡張するとともに, 弱解の Hölder 評価を示す.

主定理を述べるために, 弱 L^p 空間を導入する.

Date: June 25, 2010.

定義 1.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p>1$ に対し, $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ であるとは, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ かつ

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K\subset\Omega\,:\,\mathrm{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{1}{p}}} \int_K |f|\,dx < \infty$$

であるときをいう.

注意 1.3. 弱 L^p 空間は分布関数 $\mu_{|f|}(\lambda) := |\{x \in \Omega \,:\, |f(x)| > \lambda\}|$ を用いて

$$L^{p,\infty}_{\mathrm{w}}(\Omega) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,:\, \sup_{\rho>0} \lambda^{\frac{1}{p}} \mu_{|f|}(\lambda) < \infty\} \qquad (\text{Lorentz 空間})$$

で定義できることが知られている. $p>1$ のとき, 我々の定義と分布関数を用いた定義は同値となる. 実際, $c_0>0$ が存在して,

$$c_0 \|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} \le \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)}$$

が成り立つ.

Hölder の不等式と $|x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ より, $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ となることに注意する.

定理 1.4. $\alpha>1$ とし, u を (PME) の有界な弱解とする. $\frac{2}{q}+\frac{n}{p}<1$ をみたす, ある $p,q\ge 1$ に対し, $|f|^2, g \in L^{\frac{q}{2}}(0,\infty;\, L^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))$ を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, u は $(\varepsilon,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上一様に Hölder 連続となり, $(t,x),(s,y) \in (\varepsilon,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \le C\Big(&\|u\|^{\alpha}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \\
&+ \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \big\||f|^2\big\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(0,\infty\,;\,L^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|^{\frac{2}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(0,\infty\,;\,L^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))}\Big) \\
&\times \big(\|u\|^{\frac{\gamma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} |t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $C,\gamma>0$ は, n,α,p,q,ε にのみ依存する定数である.

注意 1.5. 定理 1.4 は熱方程式である, $\alpha=1$ の場合を含む.

2. 退化 Keller-Segel 方程式系の解の漸近挙動

次の退化 Keller-Segel 方程式系の解の時刻無限大での漸近挙動を考える:

$$(\mathrm{dKS}) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \mathrm{div}(u\nabla\psi) = 0, & t>0\,, x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \psi = u, & t>0\,, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \ge 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし, $\alpha>1$, $n\ge 3$ とし, $u_0=u_0(x)$ は与えられた非負の初期値とする. 方程式系 (dKS) の弱解を, (PME) と同様に超関数の意味で定義する. ただし, ψ は u の Bessel ポテンシャル $(-\Delta+1)^{-1}u$ で与える.

$\alpha \ge 2-\frac{2}{n}$ のとき, 小さい初期値に対して (dKS) の減衰する大域解が存在し, その時刻無限大での漸近形状が Barenblatt 解になることが知られている,(Sugiyama-Kunii [6], Luckhaus-Sugiyama [4]). Ogawa [5] は, 非線形性が劣臨界, $\alpha < 2 - \frac{2}{n}$ であるときに, L^1-剰余項の収束の速さを陽的に表示した. この結果を示すために, 前方自己相似変換

$$s = \frac{1}{\sigma}\log(1+\sigma t)\,, \qquad\qquad y = \frac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}},$$
$$v(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}}u(t,x)\,, \qquad \phi(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}}\psi(t,x)$$

を導入する. このとき, (v,ϕ) は

$$\begin{cases} \partial_s v - \mathrm{div}_y(\nabla_y v^\alpha + yv - e^{-\kappa s}v\nabla_y\phi) = 0, & s>0\,, y\in\mathbb{R}^n, \\ -e^{-2s}\Delta_y\phi + \phi = v, & s>0\,, y\in\mathbb{R}^n, \\ v(0,y) = u_0(y) \geq 0, & y\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

をみたす. ただし, $\kappa = n+2-\sigma = n(2-\alpha)$ である. さらに,

$$(1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})}\|u(t)-U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|v(s)-V\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

となることから, スケール変換された解 v の V への収束の速さを求めることで, (dKS) の弱解の漸近挙動と剰余項の収束の速さを求めることができる. しかし, 非線形性が臨界的 $\alpha = 2-\frac{2}{n}$ のときは, v の時空間一様な Hölder 連続性が明らかでなかったため, 剰余項の収束の速さが得られていなかった. 本節では, 前節における Hölder 評価を用いて, v の時空間一様な Hölder 連続性を示すことで, 次の定理を示す:

定理 2.1 (小川卓克教授との共同研究)**.** $n \geq 3$, $\alpha = 2-\frac{2}{n}$ とする. ある $\gamma > n$ に対し, 十分小さい $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ は $|x|^\gamma u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする. このとき, ある定数 $C,\nu > 0$ が存在して, (dKS) の解 u は

$$\|u(t)-U(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+\sigma t)^{-\nu}, \quad t>0$$

をみたす. ここで, U は $\|U(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ をみたす Barenblatt 解である.

定理 1.4 を使うと, v の時空間一様な Hölder 連続性が示せる. 実際 $|y|^\gamma u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ から, $yv \in L^\infty(0,\infty\,;L^\gamma(\mathbb{R}^n))$ が従う. $e^{-\kappa s}v\nabla\phi \in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ より, $yv - e^{-\kappa s}v\nabla\phi$ は時空間局所一様に $L^\infty(0,\infty\,;L^\gamma(\mathbb{R}^n))$ に属するため, $\gamma > n$ より v は時空間局所一様に Hölder 連続になることがわかる. v は時空間一様の Hölder 連続性と Ogawa [5] の議論により, 定理 (dKS) が従う.

3. Hölder 評価の証明の概略

熱方程式の場合は, Harnack 不等式を導出することで, 弱解の Hölder 連続性が示せることが知られている. しかし, (PME) の解は Barenblatt 解のように, 0 となる点があるため, Harnack 不等式は一般には成立しない. そこで, Harnack 不等式を用いない方法で Hölder 連続性を導出する. 以下, u のかわりに u^α を考えることで

(PME*) $$\partial_t u^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta u = \mathrm{div}\, f + g$$

を考える. さらに, $\rho, M > 0$ に対し, 修正した放物型円筒

$$Q_{\rho,M} := \left(-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\right)\times B_\rho$$

を導入する. ここで, B_ρ は半径 ρ の開球である.

注意 3.1. スケール変換

$$u_M(s,x) := \frac{1}{M}u(t,x), \quad t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}s$$

を考えると $f, g \equiv 0$ としたときに, u が (PME*) をみたすことと u_M が (PME*) をみたすことが同値となる.

補題 3.2. 十分小さな $\rho > 0$ に対し, M を $\sup_{Q_{\rho,M}} u$ に近い定数, ω を $\operatorname{osc}_{Q_{\rho,M}} u$ に近い定数とする. このとき, ある定数 θ_0, η_0 と放物型円筒 $Q \Subset Q_{\rho,M}$ が存在して, 次が成り立つ:

(i) (the lower bounds) もし

$$\left| Q_{\rho,M} \cap \left\{ u < \inf_{Q_{\rho,M}} u + \frac{\omega}{2} \right\} \right| \leq \theta_0 |Q_{\rho,M}|$$

ならば, $\inf_Q u \geq \inf_{Q_{\rho,M}} u + \eta_0 \omega$ となる.

(ii) (the upper bounds) もし

$$\left| Q_{\rho,M} \cap \left\{ u < \inf_{Q_{\rho,M}} u + \frac{\omega}{2} \right\} \right| > \theta_0 |Q_{\rho,M}|$$

ならば $\sup_Q u \leq \sup_{Q_{\rho,M}} u - \eta_0 \omega$ となる.

どちらの場合であっても,

$$\operatorname*{osc}_Q u = \sup_Q u - \inf_Q u \leq (1-\eta_0)\omega \cong (1-\eta_0) \operatorname*{osc}_{Q_{\rho,M}} u$$

が成り立つ. この議論を繰り返すと, 定数 $0 < r_0 < 1$ と単調減少する放物型円筒の列 $\{Q_{\rho_m,M_m}\}_{m=0}^{\infty}$ がとれて

$$\begin{cases} \operatorname*{osc}_{Q_{\rho_m,M_m}} u \leq (1-\eta_0) \operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m-1},M_{m-1}}} u \\ \rho_m \leq r_0 \rho_{m-1} \end{cases}$$

とできる. $\gamma > 0$ を $1 - \eta_0 \leq r_0^\gamma$ をみたすようにとれば

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_m,M_m}} u \leq (1-\eta_0)^m \operatorname*{osc}_{Q_{\rho_0,M_0}} u \leq \left(\frac{\rho_m}{\rho_0}\right)^\gamma \operatorname*{osc}_{Q_{\rho_0,M_0}} u$$

となり, u が γ 次の Hölder 連続であることが従う.

References

[1] Caffarelli, L. A., Vázquez, J. L. and Wolanski, N. I., *Lipschitz of solutions and interfaces of the N-dimensional porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J., **36** (1987), 373–401.

[2] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n-dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 361–391.

[3] DiBenedetto, E. and Friedman, A., *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math., **357** (1985), 1–22.

[4] Luckhaus, S. and Sugiyama, Y., *Asymptotic profile with the optimal rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases*, Indiana Univ. Math. J., **56** (2007), 1279–1297.

[5] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations, **21** (2008), 1113–1154.

[6] Sugiyama, Y. and Kunii, H., *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations, **227** (2006), 333–364.