On quenching and dead core at space infinity for semilinear heat equation with absorption

梅田典晃　(東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員)

本講演では吸収項のある半線形熱方程式の初期値問題:

$$u_t = \Delta u - u^{-p} \quad (x \in \mathbf{R}^d,\ t > 0), \quad u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}^d) \tag{1}$$

を考える。ここで $d \geq 1$、$p > -1$ とする。初期値 u_0 は

$$u_0 \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ において一様有界連続}, \quad m := \inf_{x \in \mathbf{R}^d} u_0(x) > 0 \tag{2}$$

を満たすとする。

初期値問題 (1) は初期値の条件 (2) に対して唯一つの古典解をもつが、有限時間で quenching する。与えられた初期値 u_0 に対して、

$$T(u_0) = \sup\{t > 0; \inf_{x \in \mathbf{R}^d} u(x,t) > 0\} < \infty$$

を u の quenching time と呼ばれている。明らかに

$$\lim_{t \to T(u_0)} \inf_{x \in \mathbf{R}^d} u(x,t) = 0 \tag{3}$$

となる。また、この現象 (3) を解 u が時間 $T(u_0)$ において quenching すると言う。本来『quenching』は $p > 0$ のときに使われ、$-1 < p < 0$ では『dead-core』が使われるが、本講演においては『quenching』を $p > -1$ の時に使わせて貰うことにする。

関数 v は初期値を $m = \inf_{x \in \mathbf{R}^d} u_0(x)$ としたときの (1) の解とする。実はこの v は簡単に計算でき、

$$v(t) = \{(p+1)(T(m) - t)\}^{1/(p+1)} \quad \text{ここで} \quad T(m) = \frac{m^{p+1}}{p+1} \tag{4}$$

となる。この $T(m)$ は v の quenching time である。

Theorem 1. 初期値 u_0 が (2) を満たすとする。また、$\mathbf{R}^d$ における点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し、$\mathbf{R}^d$ 上ほとんどいたるところで、$u_0(x + a_k)$ が m に収束すると仮定する。このとき (1) の解に対して、$T(u_0) = T(m)$ となる。また、$u_0(x) \not\equiv m$ のとき、解は $\mathbf{R}^d$ 上において時間 $T(m)$ で quenching しない。つまり、空間無限遠でのみ quenching する。

次に quenching time における 解 $\lim_{t\to T(m)} = u(x,T(m))$ の評価を行う。ここでは、関数 $\phi(s) = v(T(m)-s) = \{(p+1)s\}^{1/(p+1)}$ と熱核を変形した関数 $g(x,t)$ を使い、$\phi(T(m)-t+g(x,t))$ の形の関数で優解と劣解を構成する。それを持ちいて次の結果を出すことが出来た。

Theorem 2. 関数 ψ が

$$\psi(x) \text{ が } \mathbf{R}^d \text{ において有界連続;} \tag{5}$$

$$\psi(x) > 0 \text{ for } x \in \mathbf{R}^d; \tag{6}$$

を満たし、さらにある定数 $C_1 > 0$ と $C_2 > 0$ が存在して、

$$\psi(x) \le C_1 \sup_{y\in B(0,1)} \left\{ \inf_{z\in B(y,1)} \psi(z+x) \right\} \text{for } x \in \mathbf{R}^d; \tag{7}$$

$$\psi(x-y) \le C_2 \exp\left(a|y|^2\right)\psi(x) \quad \text{for } x,y \in \mathbf{R}^d,\ a \in (0, 1/(4T(m))); \tag{8}$$

となるとする。初期値 u_0 に対して、定数 $C_I > 0$(または $C_{II} > 0$) が存在して

$$u_0^{p+1}(x) - m^{p+1} \ge C_I\psi(x) \quad (\text{または} \le C_{II}\psi(x)). \tag{9}$$

を満たすとする。このとき、ある正定数 $C = C(p,d,C_1,C_2,a,T(m),C_I)$(または $C' = C'(p,d,C_1,C_2,a,T(m),C_{II})$) が存在して、初期値問題 (1) の解 u を $t \to T(m)$ としたときの極限値 $u(x,T(m))$ が

$$u(x,T(m)) \ge C\{\psi(x)\}^{1/(p+1)} \quad \left(\text{または } \le C'\{\psi(x)\}^{1/(p+1)}\right)$$

を満たす。

Example. 関数 $\psi(x) = (|x|^2+1)^{-b/2}$、$e^{-b|x|}$ 及び $(\log(|x|+e))^{-b}$ $(b > 0)$ は (5)-(8) を満たす。

参考文献

[1] Y. Giga, Y. Seki and N. Umeda, *On decay rate of quenching profile at space infinity for axisymmetric mean curvature flow*, submitted.

[2] A. A. Lacey, *The form of blow-up for nonlinear parabolic equations*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** (1984), 183-202.

[3] M. Shimojō, *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations*, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 339–361.