

ウォリスの公式の初等的証明

大浦拓哉

ウォリスの公式 (John Wallis 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \quad (1)$$

は微積分を用いない方法で導かれた円周率に関する公式である。ここでは別の初等的証明を示す。

[証明] 三角関数の倍角公式より,

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{4} \right) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \right)$$

と

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} &= 1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} \right) \end{aligned}$$

が成り立ち、この2つの式を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} 1 &= \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{16}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{16}}{\sin^2 \frac{2\pi}{8}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{16}}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} \right) \\ &= \cdots \\ &= 2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2^{n+1}}} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。そして、不等式 $\sin 2\theta < 2\theta$ と $\sin(2k\theta) < 2k \sin \theta$ ($\theta = \pi/2^{n+2}$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$) を用いると、

$$1 < \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) \quad (3)$$

と評価される。また、等式

$$1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha} = 1 - \tan^2 \beta \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 \beta} \left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \right)$$

と $\sin 2\beta = 2 \tan \beta \cos^2 \beta$ から (2) 式は、

$$1 = 2^{n+1} \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos^{2^{n+1}} \frac{\pi}{2^{n+2}} \prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 - \frac{\tan^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\tan^2 \frac{\pi k}{2^{n+1}}} \right)$$

と書き換えられる。そして、不等式 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta > 1 - \theta^2$, $\cos^4 \theta > (1 - \theta^2)^2 > 1 - 2\theta^2$, $\cos^8 \theta > (1 - 2\theta^2)^2 > 1 - 4\theta^2$, \dots , $\cos^{2^{n+1}} \theta > 1 - 2^n \theta^2$ と $\tan \theta > \theta$ と $\tan(2k\theta) > 2k \tan \theta$ ($\theta = \pi/2^{n+2}$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$) を用いると、

$$1 > \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{2^{n+4}} \right) \prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) \quad (4)$$

と評価される。(3) 式と (4) 式をまとめると、

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{2^{n+4}} \right) < \prod_{k=1}^{2^n-1} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} < \frac{\pi}{2}$$

であり、 $n \rightarrow \infty$ とすると (1) 式が成り立つ。 □