

## 連続 Euler 変換の発散するフーリエ積分への応用

京都大学数理解析研究所 大浦拓哉 (Takuya Ooura)

### 1 はじめに

ここで扱う積分は,

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

で,  $f(x)$  の  $x \rightarrow \infty$  での発散のオーダーは  $O(x^m)$  であると仮定する ( $m \geq 0$ ). このとき,  $\text{Im} \omega > 0$  でこの積分は収束するので,  $\omega$  を実軸に解析接続した値が存在する場合に, その値をここでの積分値として扱う.

具体例として,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx$$

を考える. この積分を解析接続すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{i\omega x} dx &= \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{\omega - i0} - \frac{1}{\omega + i0} \right) \\ &= \delta(\omega) \end{aligned}$$

となる. したがって,  $\omega \neq 0$  ならば, この積分値は 0 である. このような収束しない Fourier 積分は, 応用上よく現れる積分であり, ここでは発散する Fourier 積分の具体的な計算を試みる.

ここでの発散する Fourier 積分の計算方法は, 連続 Euler 変換 [1, 3] を用いる. 連続 Euler 変換は Fourier 積分の加速法であり, 緩やかに発散する Fourier 積分に対しても収束させることができる. 収束する値は  $\omega$  に関して解析接続された値であり, 計算例や誤差評価などを示す.

### 2 連続 Euler 変換

通常の Euler 変換は, 交代級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

に対して,

$$S_{\text{Euler}}^{(N)} = \sum_{m=0}^{N-1} w_m^{(N)} (-1)^m a_m, \quad w_m^{(N)} = \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^N} \binom{N}{n}$$

であらわされる. ここで,  $w_m^{(N)}$  は二項分布の上側確率であることに注意する. 一方, 交代級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n} f(n)$$

は，Fourier 積分

$$I = \int_0^{\infty} e^{i\pi x} f(x) dx$$

を離散化したものであると考えられる．このことより，通常の Euler 変換を逆に連続化することで，連続 Euler 変換が次のように導出できる [1, 3, 2]．

ここでは，Fourier 積分

$$I = \int_0^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

に対する連続 Euler 変換を，

$$I_w^{(L)} = \int_0^L w(x; p, q) f(x) e^{i\omega x} dx$$

で定義する．ただし， $w(x; p, q)$  は，正規分布の上側確率で，

$$\begin{aligned} w(x; p, q) &= \int_{x/p-q}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x/p - q) \end{aligned}$$

とし， $p, q$  は積分を打ち切る区間  $L$  および  $\omega$  に依存する正の数とする．

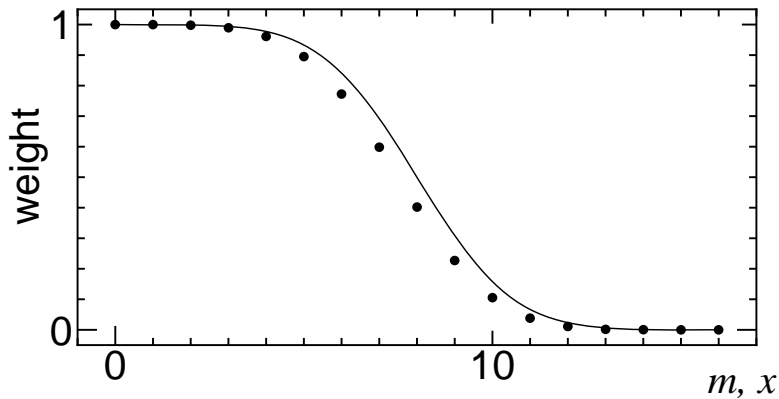


図 1: 離散重み  $w_m^{(N)}$  と連続重み関数  $w(x; p, q)$  ( $N = 16, p = q = (N/2)^{1/2}$ )

このとき，連続 Euler 変換が発散する Fourier 積分を収束させることができることを示す．まず， $\omega > 0$  として，

$$I = \lim_{\zeta \rightarrow \omega + i0} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\zeta x} dx$$

が存在すると仮定し，

$$I_w = \int_0^{\infty} w(x; p, q) f(x) e^{i\omega x} dx$$

とおく．

近似定理 関数  $f(z)$  が領域  $0 \leq \arg z \leq \delta$  ( $0 < \delta < \pi/2$ ) で正則で, その領域で  $|f(z)| \leq M(1 + |z|^m)$  を満たすならば, 任意の  $\alpha \leq \tan \delta$ ,  $0 < \alpha' < \alpha < 1$  に対して,

$$|I - I_w| \leq \frac{M}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{2^{m/2} m^m}{\omega^m (\alpha - \alpha')^m} e^{-m} \right) \left( \frac{\sqrt{\pi} p}{\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{(q - \omega \alpha' p/2)^2 / (1 - \alpha^2)} + \frac{2}{\omega \alpha'} e^{(q - \omega \alpha' p)q} \right) e^{-q^2}$$

が成り立つ.

証明  $\varepsilon > 0$  として,  $\zeta = \omega + i\varepsilon$  とする. 積分

$$\begin{aligned} \Delta I_w^{(R, \zeta)} &= \int_0^R f(x) e^{i\zeta x} dx - \int_0^R w(x; p, q) f(x) e^{i\zeta x} dx \\ &= \int_0^R (1 - w(x; p, q)) f(x) e^{i\zeta x} dx \end{aligned}$$

において, 積分路  $(0, R)$  を正則な領域の範囲で, 図2のような  $C_+$ ,  $C_R$  に変形する.

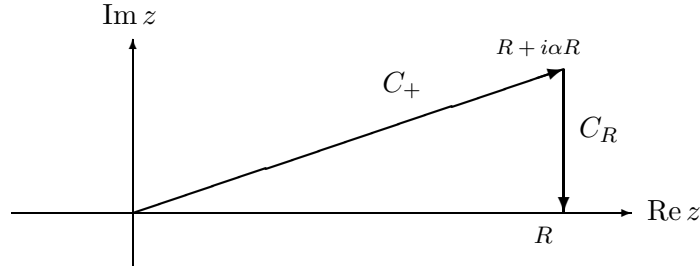


図 2: 積分路  $C_+ + C_R$

このとき,

$$\begin{aligned} |\Delta I_w^{(R, \zeta)}| &= \left| \int_{C_+ + C_R} (1 - w(z; p, q)) f(z) e^{i\zeta z} dz \right| \\ &\leq \int_{C_+ + C_R} |1 - w(z; p, q)| \cdot |f(z)| \cdot |e^{i\zeta z}| \cdot |dz| \end{aligned}$$

が成り立つ. この式の右辺の  $C_+$  からの寄与を  $|\Delta I_w^{(R, \zeta)}|_{C_+}$ ,  $C_R$  からの寄与を  $|\Delta I_w^{(R, \zeta)}|_{C_R}$  とおき, [3] の定理 2 と全く同じ考え方でこれらを評価する. まず,

$$\begin{aligned} |\Delta I_w^{(R, \zeta)}|_{C_R} &< M(1 + (1 + \alpha^2)^{m/2} R^m) \int_0^{\alpha R} |1 - w(R + it; p, q)| e^{-\varepsilon R - \omega t} dt \\ &< M(1 + (1 + \alpha^2)^{m/2} R^m) \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-(R/p - q)^2 + (R\alpha/p)^2} \right) \frac{1}{\omega} e^{-\varepsilon R} \end{aligned}$$

であり,  $R \rightarrow \infty$  で  $|\Delta I_w^{(R, \zeta)}|_{C_R}$  は 0 に収束する. 一方,

$$\begin{aligned} |\Delta I_w^{(R, \zeta)}|_{C_+} &< \sup_{t > 0} M(1 + (1 + \alpha^2)^{m/2} t^m) e^{-\omega(\alpha - \alpha')t} \\ &\quad \int_0^\infty |1 - w(t + i\alpha t; p, q)| \cdot e^{-\omega \alpha' t} (1 + \alpha^2)^{1/2} dt \\ &< M(1 + (1 + \alpha^2)^{m/2} m^m \omega^{-m} (\alpha - \alpha')^{-m} e^{-m}) (1 + \alpha^2)^{1/2} \\ &\quad \left( \frac{\sqrt{\pi} p}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{(q - \omega \alpha' p/2)^2 / (1 - \alpha^2)} + \frac{1}{\omega \alpha'} e^{(q - \omega \alpha' p)q} \right) e^{-q^2} \end{aligned}$$

であり，求める結果が得られる．

[証明終り]

近似定理より， $p, q, \alpha$  および  $L$  を

$$q = \frac{\omega\alpha'}{2}p, \quad L = 2pq = \frac{4}{\omega\alpha'}q^2$$

と選べば， $I_w$  を  $L$  で打ち切った連続 Euler 変換の誤差は，

$$\begin{aligned} |I - I_w^{(L)}| &\leq |I - I_w| + |I_w - I_w^{(L)}| \\ &= O(pe^{-q^2}) \\ &= O(\sqrt{L}e^{-\omega\alpha'L/4}), \quad L \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる．よって，連続 Euler 変換した積分値は，発散のオーダーによらず指数関数的に目的の積分値に収束する．

### 3 発散する Fourier 積分の計算例

積分

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty x \cos x \, dx = -1 \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^2} \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}e^{-1} \\ I_3 &= \int_0^\infty x^2 J_0(x) \, dx = -1 \end{aligned}$$

に対して連続 Euler 変換を適用して，Legendre-Gauss 積分公式で計算した例を表 1 に示す．連続 Euler 変換のパラメータは， $q = \omega p/2 = 4.5$ ， $L = 2pq = 81$  と選び計算を行った．このときの，連続 Euler 変換の理論誤差の主要項は， $e^{-q^2} = 1.6 \times 10^{-9}$  である．なお，計算はすべて仮数部が 53 ビットの倍精度 (有効桁数は約 16 桁) で計算を行った．

表 1: 連続 Euler 変換と Legendre-Gauss 積分公式での計算例

積分	$q = p/2 = 4.5, L = 81$	
	標本数	誤差
$I_1$	50	$4.6 \times 10^{-8}$
$I_2$	50	$1.8 \times 10^{-7}$
$I_3$	50	$6.7 \times 10^{-8}$

ここで， $I_3$  は，Bessel 関数を含む発散積分で，Hankel 変換を  $\omega = 1 + i0$  に解析接続した値として計算できることがわかる．

次に，有限区間に対する DE 公式での計算例として，原点に特異性がある積分

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^\infty \log x \sin x \, dx = -\gamma \\ I_5 &= \int_0^\infty \sqrt{x} \cos x \, dx = -\sqrt{\pi/8} \end{aligned}$$

表 2: 連続 Euler 変換と有限区間 DE 公式での計算例

積分	$q = p/2 = 4.5, L = 81$		
	DE 公式の刻み幅	標本数	誤差
$I_1$	0.04	100	$4.7 \times 10^{-8}$
$I_2$	0.04	85	$8.2 \times 10^{-8}$
$I_3$	0.04	88	$7.2 \times 10^{-8}$
$I_4$	0.04	93	$6.9 \times 10^{-9}$
$I_5$	0.04	92	$1.9 \times 10^{-9}$

を追加して計算を行った．この結果を表 2 に示す．

有限区間に対する DE 公式は，被積分関数の特異性の有無にかかわらず計算ができ，適用範囲は広いが， $I_1, I_2, I_3$  のような被積分関数が滑らかな積分は，Legendre-Gauss 積分公式の方が少ない標本点数で計算できるのがわかる．

さらに，発散する Fourier 積分に対する他の計算方法との比較として，Fourier 積分に対する DE 公式 [4] の計算例を表 3 に示す．この，Fourier 積分に対する DE 公式は，発散する Fourier 積分を非常に効率よく計算できることがわかっている [5]．ここでの Fourier 積分に対する DE 公式の変数変換は，

$$x = \frac{\pi}{h} \cdot \frac{t}{1 - \exp(-2\pi \sinh(t))}$$

と選んで計算を行った．

表 3: Fourier 積分に対する DE 公式での計算例

積分	刻み幅 $h$	標本数	誤差
$I_1$	0.1	39	$3.1 \times 10^{-8}$
$I_2$	0.1	33	$3.3 \times 10^{-8}$
$I_4$	0.1	38	$1.6 \times 10^{-8}$
$I_5$	0.1	40	$1.1 \times 10^{-8}$

Fourier 積分に対する DE 公式では，被積分関数のゼロ点の位置と周期が正確にわかっているなければ計算できないという欠点がある．したがって，Bessel 関数を含む積分  $I_3$  は，そのままでは計算することができない．

次に，発散のオーダーと誤差の増加について調べる．計算する積分は，

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^\infty \sin x \, dx = 0! = 1 \\ I_7 &= \int_0^\infty x^2 \sin x \, dx = -2! = -2 \\ I_8 &= \int_0^\infty x^4 \sin x \, dx = 4! = 24 \\ I_9 &= \int_0^\infty x^6 \sin x \, dx = -6! = -720 \end{aligned}$$

で，連続 Euler 変換のパラメータは  $q = \omega p/2 = 5.5, L = 2pq = 121$  と選び，Legendre-Gauss

積分公式で計算を行った．この結果を表 4 に示す．このとき，連続 Euler 変換の理論誤差は，主要項  $e^{-q^2} = 7.2 \times 10^{-14}$  に  $(\text{const.})^m m^m$  の項が追加される．

表 4: 連続 Euler 変換と Legendre-Gauss 積分公式での計算例

積分	$q = p/2 = 5.5, L = 121$	
	標本数	誤差
$I_6$	70	$1.4 \times 10^{-13}$
$I_7$	70	$3.9 \times 10^{-10}$
$I_8$	70	$3.1 \times 10^{-6}$
$I_9$	70	$1.4 \times 10^{-2}$

この積分の計算区間は  $L = 121$  で， $121^6 \simeq 3.1 \times 10^{12}$  となり，実際の計算では， $m$  が大きくなると連続 Euler 変換の理論誤差に加えて，被積分関数の発散による桁落ち誤差が大きく効いてくるのがわかる．

## 4 まとめ

連続 Euler 変換により，緩やかに発散する Fourier 積分を解析接続された積分値をもつ収束する積分に変換できることがわかった．さらに，通常の有限区間の積分公式と組み合わせる計算法で，Fourier 積分に対する DE 公式よりは少し劣るが，実用として耐えられることが示せた．また，Bessel 関数を含むような積分にも対応できるという利点がある．問題点として，発散のオーダー  $m$  に対して，連続 Euler 変換の誤差評価におよそ  $m!$  倍の項が入り，これを打ち消すためには  $L$  をさらに大きくとらないといけない．さらに発散のオーダー  $m$  が大きい場合，計算に丸め誤差が入る．この問題は，高精度の計算で解消できると思われる．

## 参考文献

- [1] 大浦拓哉, 連続 Euler 変換と減衰の遅い関数の Fourier 変換への応用, 日本応用数理学会論文誌, Vol.9 No.3, (1999), 109–121.
- [2] 大浦拓哉, フーリエ型積分に対する数値積分法の研究, 東京大学工学系研究科博士論文, (1997).
- [3] T. Ooura, A Continuous Euler Transformation and its Application to the Fourier Transform of a Slowly Decaying Function, J. Comput. Appl. Math., 130, (2001), 259–270.
- [4] T. Ooura and M. Mori, The Double Exponential Formula for Oscillatory Functions Over the Half Infinite Interval, Journal of Computational and Applied Mathematics 38, (1991), 353-360.
- [5] M. Mori and T. Ooura, Double exponential formulas for Fourier type integrals with a divergent integrand, Contributions in Numerical Mathematics, ed. R. P. Agarwal, World Scientific Series in Applicable Analysis, 2, (1993), 301–308.